UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ENGENHARIA DE MATERIAIS E MANUFATURA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS PLANAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. APLICAÇÕES NA INDÚSTRIA AUTOMOBILÍSTICA.

CAIO CESAR BERGAMASCO RAIMUNDO

SÃO CARLOS
2019

CAIO CESAR BERGAMASCO RAIMUNDO

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS PLANAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. APLICAÇÕES NA INDÚSTRIA AUTOMOBILÍSTICA.

Versão Original

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Materiais e Manufatura.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

SÃO CARLOS
2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

B493o

Bergamasco Raimundo, Caio Cesar
Otimização topológica de estruturas planas utilizando o Método dos Elementos Finitos: Aplicações na indústria automobilística / Caio Cesar Bergamasco Raimundo; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2019.

Monografia (Graduação em Engenharia de Materiais e Manufatura) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

1. Método dos elementos finitos. 2. Otimização topológica. 3. Confiabilidade. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Caio Cesar Bergamasco Raimundo
Título do TCC: Otimização topológica de estruturas planas utilizando o método dos elementos finitos. Aplicações na indústria automobilística.
Data de defesa: 12/06/2019

Comissão Julgadora	**Resultado**
Professor Doutor Edson Denner Leonel (orientador)	APROVADO
Instituição: EESC - SET	
Professor Doutor Rodolfo André Kuche Sanches	Aprovado
Instituição: EESC - SET	
Pesquisador Antônio Rodrigues Neto	APROVADO.
Instituição: EESC - SET	

Presidente da Banca: **Professor Doutor Edson Denner Leonel**

(assinatura)

RESUMO

RAIMUNDO, Caio Cesar Bergamasco. **Otimização topológica de estruturas planas utilizando o Método dos Elementos Finitos. Aplicações na indústria automobilística.** 2019. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Neste trabalho será apresentado um modelo numérico baseado no método dos elementos finitos com a finalidade de utilizar a otimização topológica em estruturas planas, como forma de reduzir a quantidade de material utilizado nos projetos da equipe EESCuderia Mileage. Para este trabalho, foi usada a abordagem ESO (Evolutionary Structural Optimization), a fim de remover material ineficiente nas estruturas analisadas. Os modelos utilizados como exemplos, foram validados através da comparação com benchmarks disponíveis na literatura. O modelo aplicado à gaiola do carro utilizado pela equipe EESCuderia Mileage sofreu inicialmente remoção de material, foram então encontradas duas geometrias ótimas diferentes, essas geometrias sofreram análises determinísticas usando o software de simulação estrutural ANSYS para validar os modelos encontrados. A análise mecânica determinística utilizada nos modelos da gaiola foi então complementada por meio do uso de algoritmos de confiabilidade. O método utilizado neste trabalho foi a simulação de Monte Carlo; está metodologia tem o intuito de analisar a confiabilidade de treliças planas. Dessa forma a influência das incertezas pôde ser quantificada e a probabilidade de falha pôde ser analisada. Os resultados obtidos para as diferentes geometrias analisadas foram satisfatórios considerando os cenários analisados.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos. Otimização topológica. Confiabilidade.

ABSTRACT

RAIMUNDO, Caio Cesar Bergamasco. **Topological optimization of 2 D structures using the finite element method. Applications in the automotive industry.** 2019. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

In this work, we present a numerical model based on the finite element method for the purpose of using the topological optimization in 2 D structures, as a way to reduce the amount of material used in the projects of the EESCuderia Mileage team. For this work the ESO (Evolutionary Structural Optimization) approach was used, as a way to remove inefficient material in the analyzed structures. The models used as examples, through the comparison of benchmarks available in the literature the examples became valid. The model applied to the car cage used in the EESCuderia Mileage team's car suffered initially material removal, resulting in two different optimal geometries, these topologies suffered deterministics analysis using the simulation software Ansys, to validate the found models. The deterministic mechanical analysis used in the car cage models were then complemented by using reliability algorithms. The method used in this work was the Monte Carlo simulation, in order to analyze the reliability of 2 D trellis. Thus the influence of the uncertainties and the fail probability could be analised. The obtained results for the different geometries were satisfying considering the analyzed scenarios.

Keywords: Finite element method. Topological optimization. Reliability.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 12
2. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA 15
   2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA (ESO) 18
   2.2 FORMULAÇÃO ESO EM NÍVEL DE TENSÃO 19
   2.3 TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES 20
3. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL 21
   3.1 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO 22
4. RESULTADOS 24
   4.1 EXEMPLO 1 24
   4.2 EXEMPLO 2 31
   4.3 ESTRUTURA DE GAIOLA 37
   4.3.1 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO 48
5. CONCLUSÃO 53
6. REFERENCIAS 54

APÊNDICE A 58

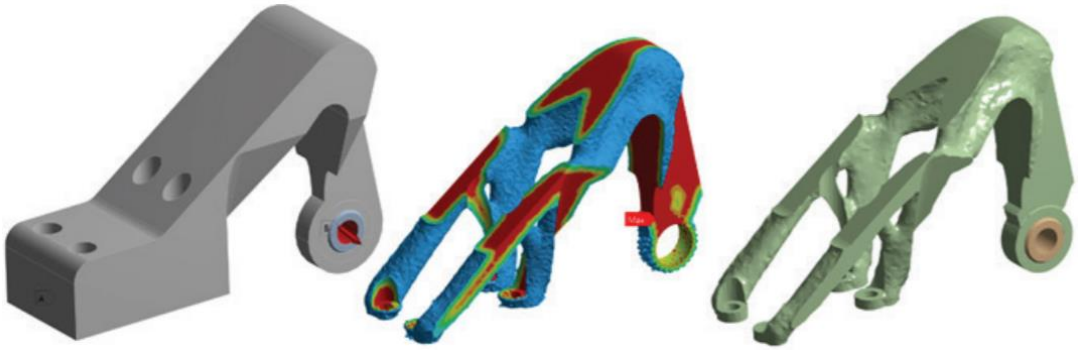
1. INTRODUÇÃO

Um projeto de engenharia de estruturas deve aliar condições de segurança e viabilidade econômica. No entanto, tais aspectos são naturalmente opostos, uma vez que estruturas mais robustas, e consequentemente com maior consumo de material e maior custo, usualmente levam a uma maior segurança. Dessa forma, a busca por um projeto ótimo requer a utilização de técnicas de otimização, as quais possibilitam conciliar a importância destes dois requisitos opostos.

Nesse contexto, surgem às técnicas de otimização topológica, que possibilitam a determinação da distribuição adequada de material no domínio da estrutura. Assim, tal distribuição tende a levar a solicitações uniformes nos pontos materiais da estrutura, utilizando ao máximo sua capacidade. A otimização topológica pode ser empregada em praticamente todos os projetos de engenharia de estruturas, desde elementos simples até estruturas extremamente complexas, como indicado nas Fig. 1 e Fig. 2.

A partir da utilização da otimização topológica é possível reduzir a quantidade de material a ser utilizado, consequentemente reduzindo a massa da estrutura, mantendo um grau de confiabilidade alto na peça após a otimização.

Figura 1- Exemplo de otimização topológica.



Fonte: ESSS, 2017

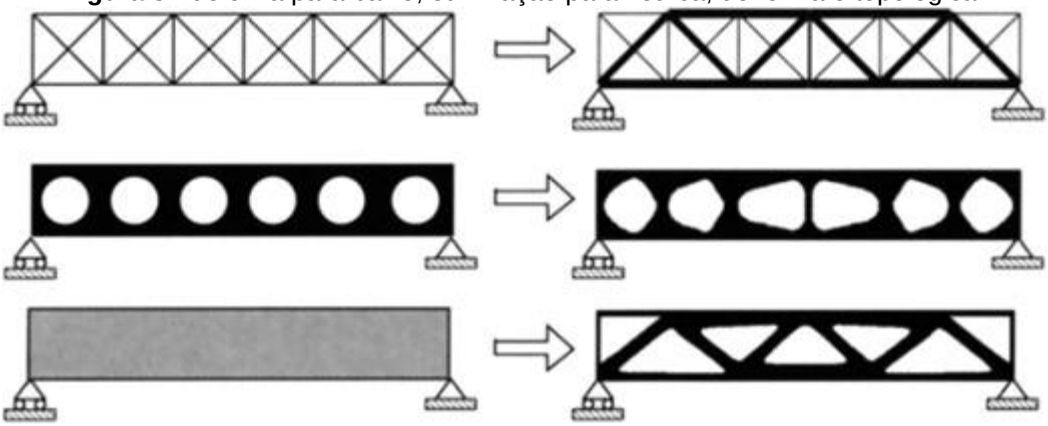
Figura 2 - Otimização topológica em um edifício.

Fonte: DAMONTE, 2017

A solução e modelagem de problemas de engenharia de estruturas, em particular na solução de problemas de valor de contorno, pode ser obtida por diferentes formas. Para problemas mais simples, em que a geometria e as condições de contorno são simplificadas, a técnica de solução analítica pode ser utilizada. Tal técnica se baseia na teoria da elasticidade e em suas inerentes simplificações. Porém, para geometrias e condições de contorno complexas torna-se necessário o uso de métodos numéricos.

Além da otimização topológica, que visa à retirada de material ineficiente de uma estrutura, a otimização paramétrica e de forma também podem ser usadas na melhoria de soluções de engenharia. A otimização paramétrica possui domínio fixo e visa a obtenção da melhor área de seção transversal possível para o problema. Já a otimização de forma possui domínio variável altera a geometria da estrutura sem retirar material da mesma para se obter o melhor domínio para o problema. Os três diferentes métodos de otimização podem ser observados na figura 3.

Figura 3 - de cima para baixo, otimização paramétrica, de forma e topológica.



Fonte: BENDSØE e SIGMUND, 2002

Existem diferentes metodologias para a aplicação da otimização topológica. A utilizada neste trabalho foi a técnica ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), ou otimização estrutural evolucionaria em português. Essa técnica consiste na retirada gradual de regiões que apresentam menor solicitação, sendo o critério que representa as solicitações dado pela tensão de Von Mises.

Além do método ESO, outras metodologias podem ser usadas. A metodologia SESO (*Smoothing Evolutionary Structural Optimization*), consiste na retirada de material da estrutura por iteração (p%), assim como a metodologia ESO. Porém, com a devolução (1-p%) de material a estrutura, para evitar problemas que acontecem na metodologia anterior, como o tabuleiro de xadrez.

Já a metodologia SIMP (*Simple Isotropic Material with Penalization*) utiliza a teoria da homogeneização para descrever propriedades do material, assim como parametrização para resolução do sistema.

O método da otimização topológica clássico é um método determinístico. Porém, os problemas físicos possuem aleatoriedades inerentes. Dessa forma, a otimização topológica clássica não é robusta o suficiente para a obtenção de uma geometria estrutural que seja capaz de absorver as incertezas inerentemente atuantes no problema. Portanto, a quantificação de incertezas e a avaliação de probabilidades de falha deve ser feita a posteriori, com base nas ferramentas da teoria da confiabilidade.

Nesse trabalho, foi inicialmente desenvolvido um código base para a modelagem mecânica de estruturas planas com base no Método dos Elementos

Finitos (MEF). Foi implementado o elemento quadrilateral linear plano. No código base, tem-se como objetivo a determinação dos deslocamentos em todos os nós da estrutura e também do estado de tensão nos pontos de integração do elemento finito. Em seguida, foi acoplada a técnica ESO ao código base. A técnica ESO envolve a remoção gradativa de material de acordo com um critério heurístico de velocidade. Intervalos para tais parâmetros estão disponíveis na literatura.

O código implementado será aplicado na análise de estruturas utilizadas pela EESCuderia Mileage. Após a obtenção das geometrias otimizadas topologicamente, será utilizado o método de simulação de Monte Carlo para a quantificação das incertezas do problema. Parâmetros como: módulo da força aplicada sobre a estrutura e o ângulo de aplicação dessa força serão considerados aleatórios, seguindo distribuições estatísticas individuais. Dessa forma, probabilidades de falha poderão ser mensuradas.

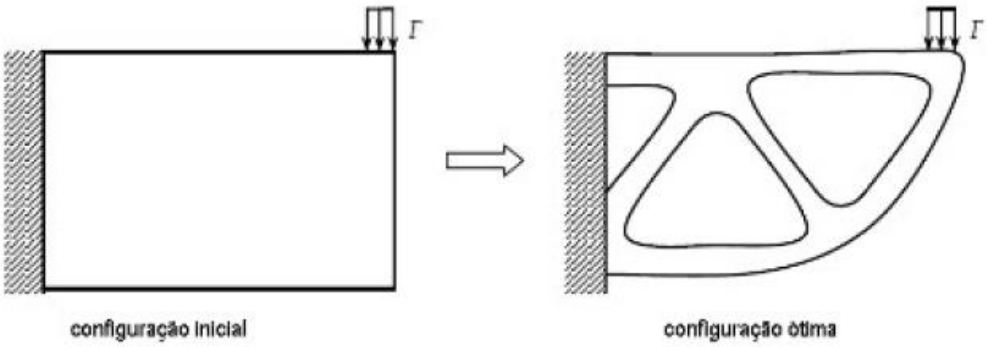
Pretende-se, com esse trabalho, dar continuidade ao estudo e ao desenvolvimento de temas relevantes e atuais nos campos da mecânica computacional e mecânica dos materiais. Além disso, pretende-se contribuir com a formação de um aluno em temas que não são lecionados em cursos regulares de graduação.

Neste trabalho é feita a otimização topológica da estrutura do fixador de roda, que pode ser encontrado no apêndice A. A estrutura é encontrada no apêndice pois nela não é feita a simulação de Monte Carlo.

2. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Segundo LANES (2013), o problema de otimização topológica consiste na determinação da melhor distribuição de material em uma região preestabelecida, quando a estrutura está sujeita a restrições de projeto, como: volume, taxa de deformação, frequências naturais, etc. Para o caso plano, a otimização parte de uma estrutura retangular com o maior tamanho possível dentro do domínio, e termina com uma estrutura totalmente diferente que respeita as limitações do projeto, como é mostrado na figura 4.

Figura 4 - Representação do problema de otimização topológica



Fonte: FERNANDES, 2013, p. 03.

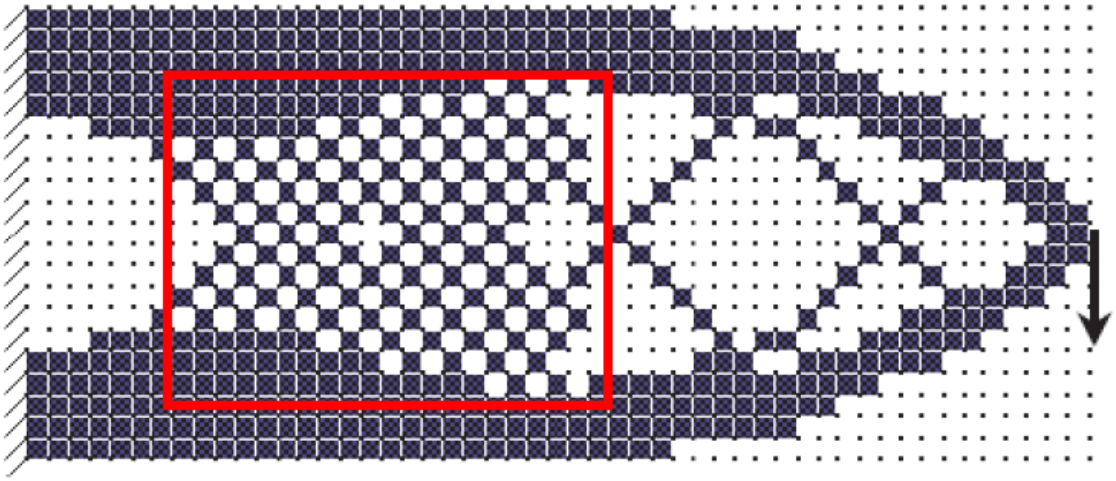
Vários algoritmos podem ser utilizados na otimização topológica. Dentre eles, pode-se mencionar o Bidirectional Evolutionary Topology Optimization (BESO). No entanto, essa abordagem requer a utilização de filtros especiais, já que o número sensitivo pode não levar a convergência da topologia. Eom *et al*. (2011) propôs o uso de informação precedente para atualizar os parâmetros do número sensitivo. Esta estratégia levou a topologias coerentes, também observadas por outros pesquisadores. O BESO encontrou aplicações industriais, incluindo componentes heterogêneos. A análise BESO envolve alta capacidade computacional, por isso, alguns estudos foram voltados em melhorar a eficiência computacional deste método.

Deve-se também mencionar pesquisas relacionadas a otimização topológica de estruturas limitadas a alguma possibilidade de falha. Esse tipo de otimização é chamado de *Reliability Based Topology Optimization* (RBTO). Este campo foi desenvolvido através dos últimos anos mostrando que a probabilidade de falha tem um impacto maior na geometria final. Normalmente, o RBTO aplica a mesma função objetivo utilizada em técnicas determinísticas. O RBTO depende da probabilidade de falha e como ela afeta a geometria. A probabilidade de falha pode ser determinada por aproximações clássicas, que dependem da precisão de cálculo de probabilidades muito baixas. Outro tipo de aproximação é o *Performance Measure Approach* (PMA).

Quando métodos numéricos de domínio são utilizados na análise de otimização topológica, cuidados especiais devem ser tomados quanto à irregularidade do tabuleiro de xadrez. Tal problema é caracterizado pela configuração alternada entre vazios e materiais, como pode ser observado na figura

5. A origem do problema está associada a erros numéricos no processo de operação dos elementos finitos (DIAZ; SIGMUND, 1995. HABER, 1996). Para eliminar esse problema Bendøe e Sigmund (2003) desenvolveram uma técnica que sugere a utilização de elementos com função interpoladora de ordem superior, como cubica ou quadrática, já que tais elementos apresentam uma melhor aproximação do campo de deslocamentos. No entanto, a suavização dos campos de tensão com base em abordagens não locais parece surtir efeito mais eficiente, o que possibilita a mitigação desse fenômeno.

Figura 5 - Representação qualitativa da irregularidade de tabuleiro de xadrez.



Fonte: LANES, 2013, p. 12.

Sanches (2011) define o problema de otimização estrutural segundo uma primeira abordagem relacionada à própria análise: a avaliação das possíveis configurações da estrutura. Diante dos resultados, são avaliadas e definidas a configuração ótima para o domínio estudado. A necessidade de se alcançar uma configuração ótima para um determinado critério de otimização agrega ao estudo um nível de análise estrutural dependente de um domínio discreto, o que possibilita o emprego do MEF. Então, essa discretização permite a implementação de uma rotina computacional eficiente no processo de análise. Porém, existe a possibilidade de problemas de instabilidade numérica como desvantagem. As referências apresentadas definem tais problemas em três categorias: irregularidades do tabuleiro de xadrez, dependência da malha e problemas de ótimos locais.

A dependência da malha é um problema inerente à discretização do domínio. Com o refinamento da malha, espera-se uma maior fidelidade das condições de

contorno da geometria ótima, contudo não é isso que ocorre. Muitas vezes malhas refinadas resultam em uma topologia mais detalhada, contudo qualitativamente diferentes de outras malhas ou modelos. Basicamente com o aumento do refinamento da malha há um aumento de espaços vazios. Diversas referências citam trabalhos que atenuam esse problema, como descrito em Jog e Haber (1996), Sigmund (1997) ou Sigmund e Petersson (1998).

O problema de ótimos locais está relacionado à natureza não convexa dos projetos, sujeitos a inúmeros resultados com soluções localizadas (COUTINHO, 2006. SANT'ANNA, 2002), ou seja, para um mesmo problema muitas geometrias ótimas podem ser encontradas dependendo dos parâmetros utilizados. De todos os problemas, talvez a determinação de soluções globais seja um dos maiores desafios na otimização topológica, o que permite entender que a identificação de ótimos locais já seja suficiente o bastante para a maioria dos projetos de engenharia.

Outro problema encontrado pelo uso da otimização topológica é o de confiabilidade, pois esse método por não considerar propriedades do material a ser utilizado no projeto de engenharia pode encontrar estruturas pouco confiáveis no final de sua aplicação sendo necessário outros métodos como simulação de Monte Carlo para se obter o grau de confiabilidade da geometria encontrada com o material a ser utilizado.

2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA (ESO)

O método de otimização topológica usado nesse trabalho é baseado no ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), ou otimização estrutural evolucionária em português. A técnica de ESO foi inicialmente proposta por Xie e Steven (1993) e foi proposta como um método de conceitos simples para a determinação topológica de projetos. O método consiste na execução de um algoritmo de aproximação heurística com a remoção gradual de regiões com menores solicitações no domínio. A remoção ocorre através de critérios de penalidade. Um dos critérios apresentados pelos autores foi baseado nas tensões equivalentes de Von Mises. Assim, regiões com tensão abaixo do valor limite de Von Mises são removidas a cada iteração do processo, o que permite com que se encontre uma estrutura com rigidez ótima para

um determinado volume máximo de material. Essa metodologia é conhecida como ESO sob nível de tensão.

Inicialmente, os critérios de remoção de Von Mises levaram a contestações a respeito de sua validação pela escassez de embasamento matemático (ZHOU; ROZVANY, 2001). Essa contestação levou à criação de uma nova metodologia, ESO em nível de deslocamentos. Essa nova técnica se baseia na igualdade de energias total e de deformação para problemas com restrição de rigidez associado a um número de sensibilidade, que é dependente das matrizes de rigidez de deslocamento (CHU *et al.,* 1996). Posteriormente, Zhao *et al.* (1998) comprovou a coerência dos resultados obtidos utilizando os dois métodos, tanto sob nível de tensão como de deformação.

A partir da consolidação do método ESO, variações nos algoritmos foram propostas com o intuito de suprir limitações, como o problema de ótimos locais. Dentre as diferentes variações vale citar: GESO (Otimização estrutural evolucionária genética) que integra operações da genética (seleção, cruzamento e mutação) ao ESO original; e ESO Aditivo, que adiciona elementos ao sistema em regiões de alta concentração de tensão. Também foram formuladas aplicações para o algoritmo para análises dinâmicas. O ESO utilizado nesse projeto é o original em nível de tensão, por ser um método de fácil implementação, além de ser mais simples de se aplicar.

2.2 FORMULAÇÃO ESO EM NÍVEL DE TENSÃO

Na formulação do método, regiões com baixo nível de solicitação são removidas da estrutura para a obtenção da geometria ideal. A remoção ocorre por um processo evolutivo, ou seja, a cada iteração elementos ineficientes são retirados até que o critério objetivo seja alcançado.

Para a determinação dos elementos que devem ser removidos da estrutura é utilizado um critério de penalidade. O critério usa formulações de tensões equivalentes de cada elemento da geometria para ranqueá-los, ou seja, encontram aqueles de maiores tensões e de menores tensões para retirá-los. É imposta uma taxa de remoção, na qual os elementos que não atingirem o valor de tensão são removidos.

A taxa de remoção e seu passo devem ser valores bem baixos próximos de 1% segundo Querin (1997), para que assim seja obtida uma melhor convergência. Nesse trabalho, as taxas de remoção utilizadas foram de 1% como exemplificado na teoria.

O processo evolucionário como um todo pode ser resumido nos seguintes passos (LANES, 2013):

Passo 1: discretização do domínio inicial da estrutura, utilizando-se uma malha fina de elementos finitos e aplicação de condições de contorno e ações prescritas;

Passo 2: analisar a estrutura com MEF;

Passo 3: remover elementos com baixa tensão;

Passo 4: repetir os passos 2 a 4, até que o projeto ótimo seja alcançado.

Neste trabalho, foi utilizado como objetivo do processo evolutivo o percentual a ser retirado da estrutura. Dessa forma, se o objetivo de retirada for de 70%, o processo deve rodar até que apenas 30% da área inicial estejam restando (já que a estrutura é bidimensional), obtendo-se assim sua estrutura ótima.

Para calcular a tensão equivalente de cada elemento, utiliza-se o critério de Von Mises, como será a seguir apresentado.

2.3 TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES

Em 1913, R. Von Mises desenvolveu um critério de escoamento com base na teoria da energia de distorção, o qual descreve que o escoamento do material ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume do material é igual ou maior que a energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando submetido a escoamento em um ensaio de tração simples (HIBEELER, 2012). Pela formulação de Von Mises, isso é equivalente matematicamente ao segundo invariante das tensões (J2) atingir seu valor crítico. Esse invariante pode ser definido como:

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \qquad (1)$$

Assumindo o caso uniaxial, pode-se encontrar o valor do invariante J2:

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{esc} - 0)^2 + (0 - \sigma_{esc})^2] = \frac{\sigma_{esc}^2}{3} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtém-se:

$$\sigma_{esc} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \qquad (3)$$

Quando estados planos de tensão são estudados, a equação (3) torna-se igual a:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \qquad (4)$$

Essa tensão equivalente ficou bastante conhecida como tensão de Von Mises, mas também pode apresentar o nome de energia de distorção máxima, ou Von Mises-Hencky.

3. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Segundo Leonel (2009), em uma análise de confiabilidade estrutural existem diversos critérios a serem avaliados, como eventos estatísticos, problemas no material sendo utilizado e falta de manutenção que levam a falha de um componente. É necessário verificar cada critério, ou seja, verificar cada modo potencial de falha da estrutura. Para isso deve-se descrever e formular o problema considerando suas diferentes variáveis e incertezas presentes no problema. Através dessa formulação, é possível determinar a probabilidade de falha do cenário, considerando o conhecimento estatístico de cada variável e sua influência sobre o comportamento da estrutura.

Quando uma estrutura não consegue mais cumprir os requisitos de projeto, assume-se que a estrutura se encontra em uma situação indesejável, ou seja, a situação que é denominada falha. Para chegar ao ponto de falha, existem várias maneiras distintas, cada uma delas é chamada de modo de falha.

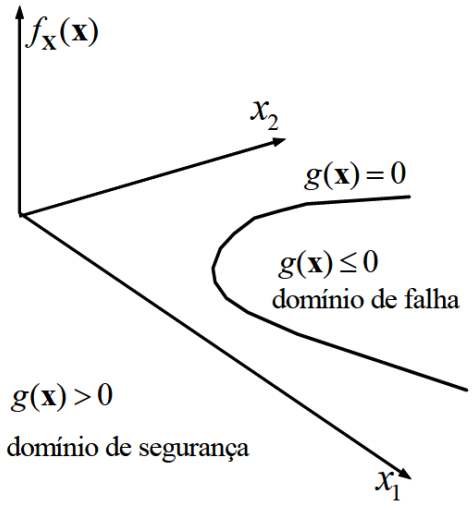
Para cada modo de falha, existe um estado limite associado, que são avaliados pelas equações de estado limite. Sendo x_1, x_2, x_3,..., x_n, as variáveis que

descrevem o comportamento da estrutura e seus carregamentos, a representação da equação de estado limite para um dado modo de falha pode ser descrito como:

$$g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \qquad (6)$$

A equação 6 separa o domínio de análise nas situações de segurança e falha. Quando o ponto se encontra na fronteira entre dois domínios, diz-se que este está sobre a superfície de falha. A figura 6 ilustra graficamente essas condições.

Figura 6 - Representação dos domínios de g(x) em um espaço de três variáveis



Fonte: PANTOJA et. al., 2016.

Nesse trabalho, não são analisados casos de confiabilidade dependentes do tempo, logo variáveis que estejam ligadas ao histórico de uso da estrutura de forma periódica devem estar expressas dentro das informações das variáveis utilizadas, caso precisem ser levadas em conta.

3.1 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

A simulação de Monte Carlo é uma técnica que permite a quantificação de incertezas por meio da simples simulação dos fenômenos envolvidos. Tem sido muito utilizada para prever o comportamento de sistemas complexos de qualquer natureza em longo prazo. Na simulação, não há limite no número de variáveis aleatórias do problema, ou complexidade do modelo, resolvendo assim problemas de muitas ou poucas variáveis aleatórias com a mesma facilidade. O único fator limitante é a capacidade computacional.

A técnica consiste em repetir um processo de simulação inúmeras vezes, usando um conjunto de valores aleatórios gerados de acordo com a distribuição de variáveis do problema. A cada simulação o resultado é obtido para os diferentes conjuntos de valores aleatórios gerados. Com a repetição do processo, uma amostra de resultados é obtida. Essa amostra gerada é similar a uma amostra de um experimento e por esse motivo, pode ser tratada estatisticamente. Assim, o resultado será mais preciso quão maior for o tamanho da amostra utilizado.

A técnica de Monte Carlo crua ou direta é baseada na geração de valores pseudorrandômicos para as variáveis aleatórias do problema (Tensão de escoamento, área ou carregamentos, entre outros).

Segundo Pellizzer (2015), a obtenção da amostra da variável aleatória, com função de distribuição cumulativa de probabilidade '$F_x(x)$' conhecida, pode ser dividida em duas etapas: inicialmente, gera-se um número aleatório 'Ψ_i', que possui distribuição uniforme entre 0 e 1; desta forma determina-se que a inversa da função de distribuição cumulativa de probabilidades no ponto 'Ψ_i' para obter-se 'X_i' (amostra de variável aleatória), segundo a equação (7):

$$X_i = F_x^{-1}(\Psi_i) \qquad (7)$$

Para distribuição cumulativa de probabilidade '$F_x(a)$' é igual a integral da função densidade de probabilidade, como mostra a equação (8):

$$F_x(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2s^2}(a-\mu)^2\} \qquad (8)$$

Para casos de incerteza associadas modeladas como variáveis de distribuição normal, as equações (7) e (8) são resolvidas numericamente, utilizando métodos de integração numérica. Outras incertezas modeladas como variáveis de distribuição uniforme com intervalos (a,b). Neste caso, foram utilizadas as equações (9) para o calculo do desvio padrão e (10) para a média.

$$s_{unif} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} \qquad (9)$$

$$\mu_{unif} = \frac{b-a}{2} \qquad (10)$$

A equação de estado limite é avaliada para cada simulação, para verificar se ocorre falha ou não. Em cada caso de falha, é somada uma unidade na variável de

número de falhas (n_{FALHAS}). O procedimento é repetido inúmeras vezes e, após isso, o número de ocorrência de falhas é dividido pelo total de vezes que o procedimento foi realizado, que coincide com o tamanho da amostra ($n_{AMOSTRA}$), obtendo-se dessa forma a probabilidade de falha.

$$\hat{P}_F = \frac{n_{FALHAS}}{n_{AMOSTRA}} \qquad (11)$$

Esse tipo de simulação é bastante robusto em relação a quantidade de variáveis aleatórias que podem ser introduzidas e também é de fácil programação. Porém, o elevado número de simulações para se obter um valor preciso de P_F é bastante elevado, necessitando assim, de um elevado custo computacional para realizá-lo.

Nesse trabalho serão levadas em consideração duas diferentes variáveis, sendo elas o módulo da força agindo sobre a estrutura e o ângulo em que essa força é aplicada sobre a estrutura. Uma análise de convergência será utilizada para verificar a precisão do valor da probabilidade de falha obtido.

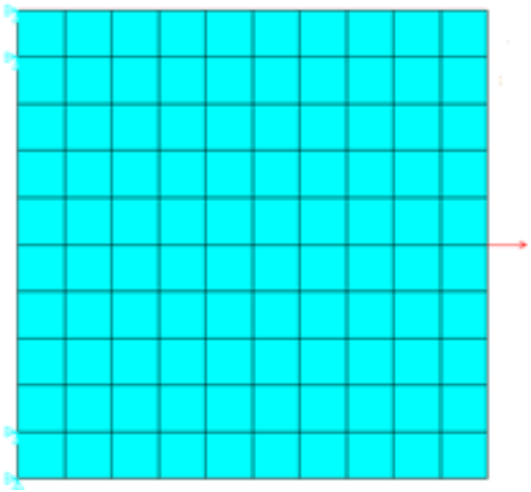
4. RESULTADOS

Os exemplos e peças a seguir foram analisados em estado plano de tensão (EPT). Porem a metodologia ESO pode também ser aplicada para problemas 3 D e para problemas em estado plano de deformação (EPD).

4.1 EXEMPLO 1

No primeiro exemplo é executada a geometria mais simples, segundo a literatura. O exemplo consiste de uma chapa tracionada por uma única força de P=10 N horizontal na borda lateral direita. A extremidade esquerda está fixada na parte superior e inferior por apoios modelados como duplos (com restrição de deslocamento nas duas direções), ou seja, a estrutura é hiperestática; cada parte está certa de 1 cm fixada. A chapa utilizada possui 10 cm x 10 cm de tamanho. O objetivo é descobrir a configuração geométrica desta estrutura que suporte o carregamento aplicado, utilizando apenas 30% do volume inicial. A figura abaixo ilustra o exemplo.

Figura 7 - Estrutura inicial do exemplo 1



Fonte: Autoria própria

A espessura do elemento é considerada unitária. Parâmetros como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, segundo estudos de otimização topológica não influênciam no resultado final, já que praticamente não alteram a diferença entre os valores de tensão de cada elemento da malha. Isso reforça o fato dos resultados serem apenas qualitativos, não quantitativos. Contudo, os valores utilizados de módulo de elasticidade foram de 100 GPa e de coeficiente de Poisson de 0,2.

São utilizadas três diferentes malhas na pesquisa, a primeira mais grosseira e a terceira mais refinada, como mostrado na figura 8:

Malha 1: 100 elemento de 1 por 1 cm;

Malha 2: 400 elementos de 0,5 por 0,5 cm;

Malha 3: 1600 elementos de 0,25 por 0,25 cm.

Figura 8 - Malhas de elementos finitos para chapa do exemplo 2

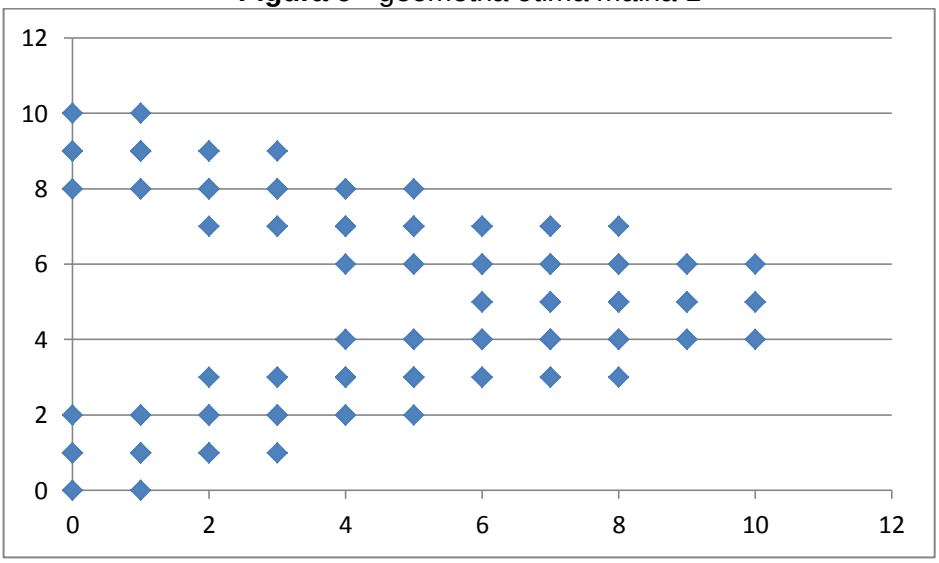
Malha 1 Malha 2 Malha 3

Fonte: Autoria própria

Para a otimização das malhas, foi utilizado o parâmetro de taxa de retirada de 1%, 0,75% e 0,5% a cada iteração. Os mesmos parâmetros foram utilizados para os

outros resultados. Para a retirada de material, foi utilizado o critério de Von Mises. Dessa forma foi obtida a geometria ótima mostrada na figura 9 abaixo.

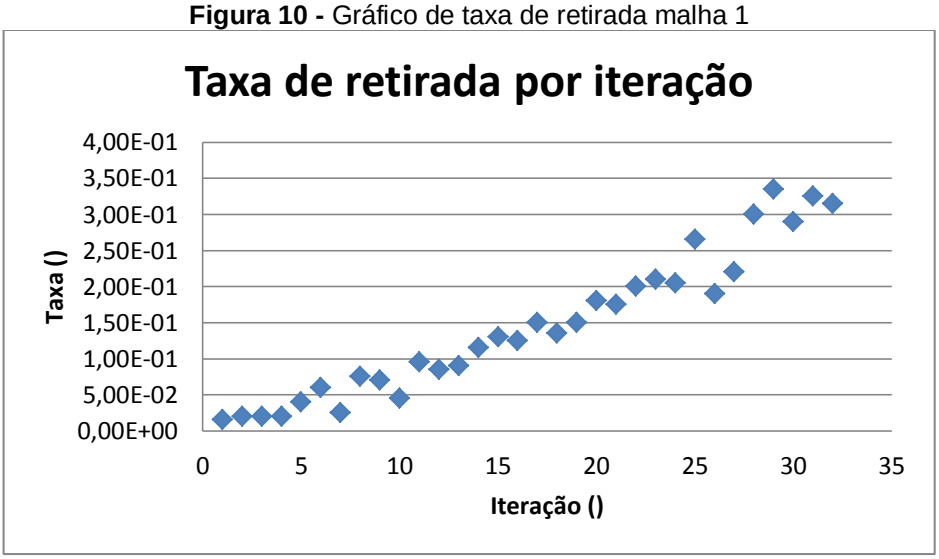
Figura 9 - geometria ótima malha 1



Fonte: Autoria própria

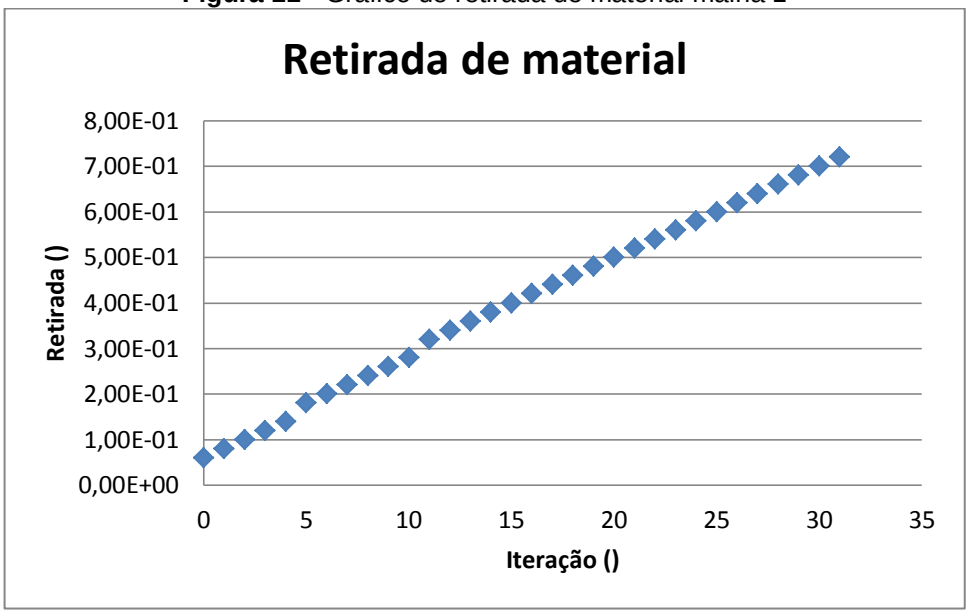
As figuras 10 e 11 abaixo mostram o processo evolutivo para o parâmetro de taxa de remoção por iteração, ou seja, a quantidade de material retirado a cada iteração do programa, e a quantidade percentual de volume removido em relação ao volume inicial, ou seja, em relação ao volume inicial o volume removido a cada iteração do programa, respectivamente, utilizando o critério de Von Mises.

Figura 10 - Gráfico de taxa de retirada malha 1



Fonte: Autoria própria

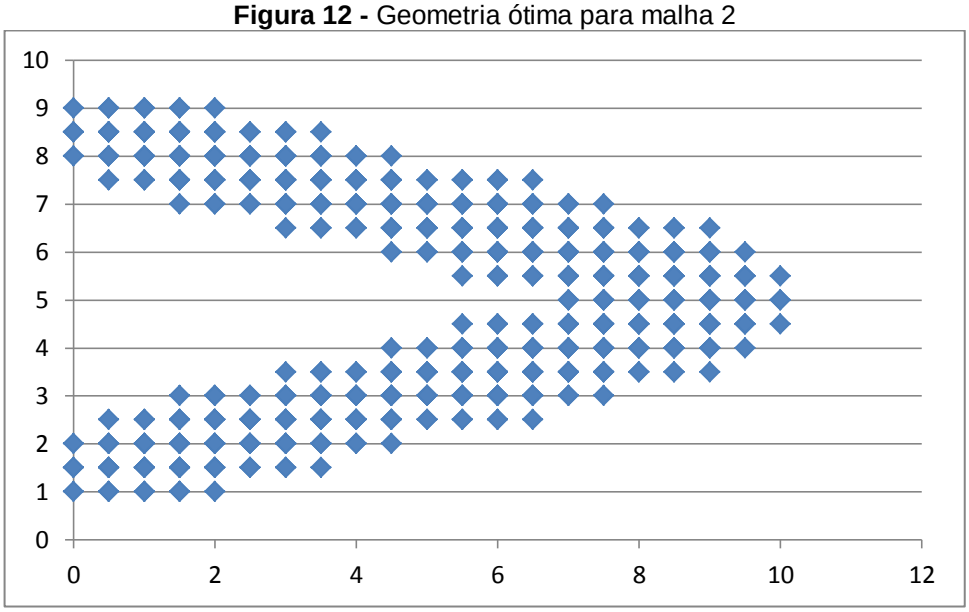
Figura 11 - Gráfico de retirada de material malha 1



Fonte: Autoria própria

Para a segunda malha, os parâmetros de otimização usados foram exatamente os mesmos da malha 1. Também foi utilizado o critério de Von Mises na malha 2. A figura 12 mostra a geometria ótima obtida com a malha.

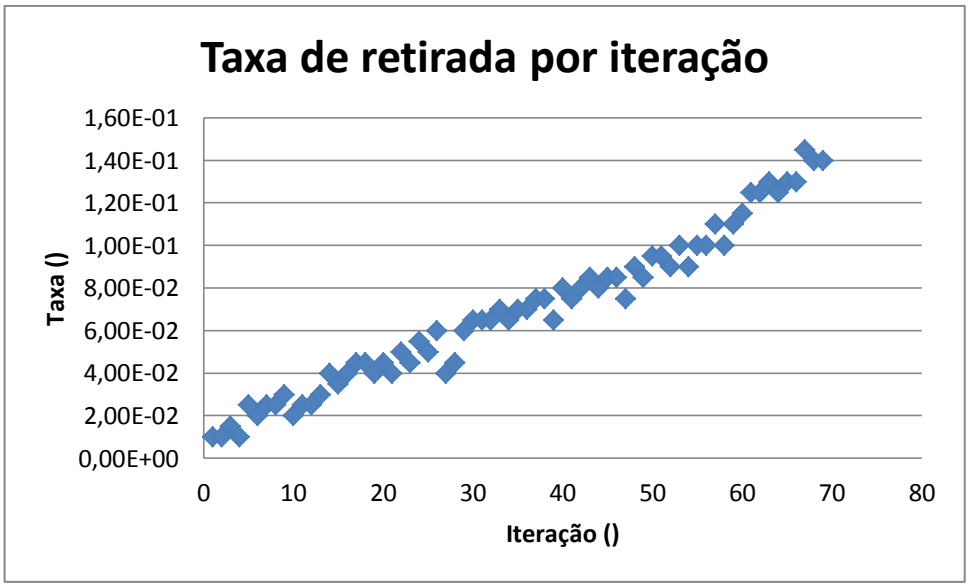
Figura 12 - Geometria ótima para malha 2



Fonte: Autoria própria

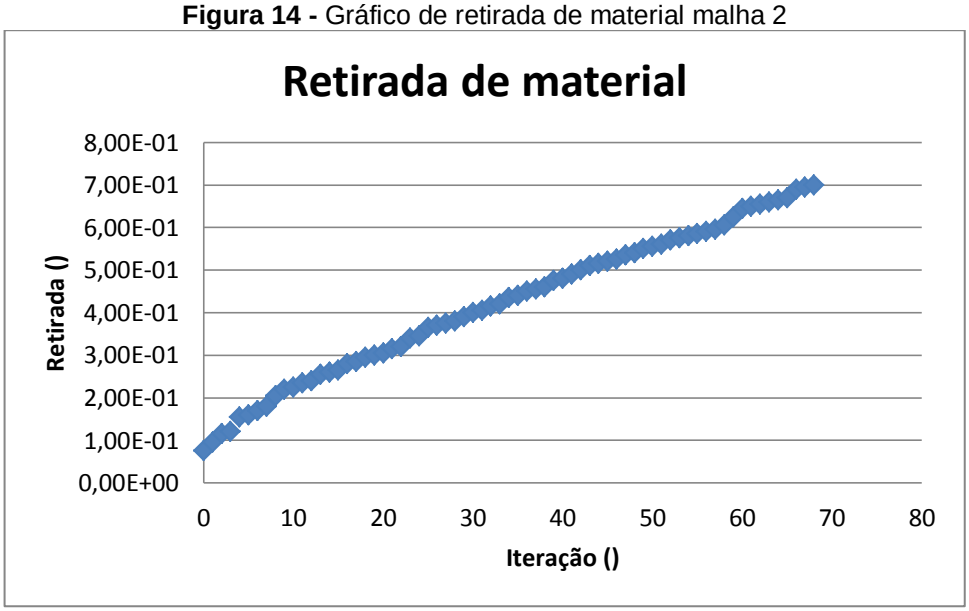
Novamente, são utilizadas as figuras 13 e 14 para demonstrar o processo evolutivo da taxa de remoção e da quantidade percentual de volume removido, também usando o critério de Von Mises.

Figura 13 - Gráfico de taxa de retirada malha 2



Fonte: Autoria própria

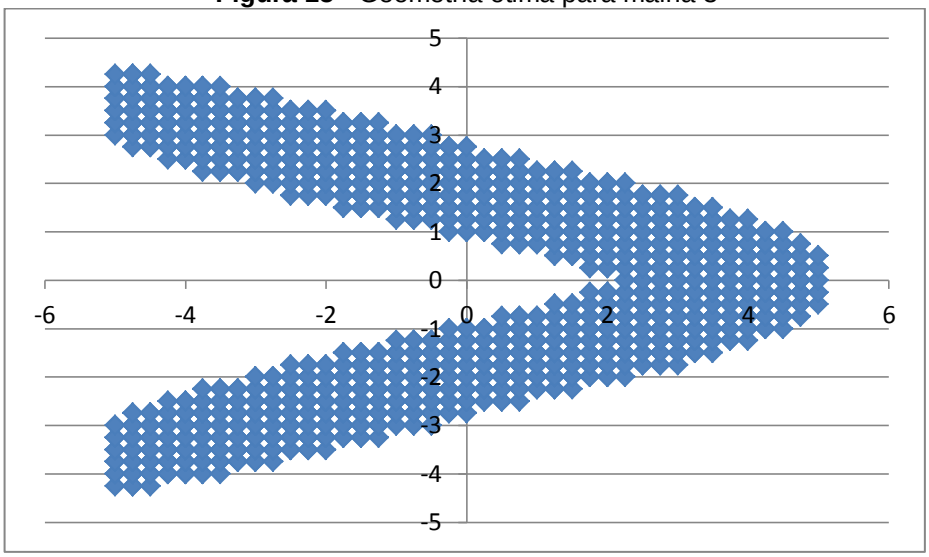
Figura 14 - Gráfico de retirada de material malha 2



Fonte: Autoria própria

Para a terceira malha, os parâmetros de otimização usados foram os mesmos das malhas anteriores. Assim como anteriormente foi usado o critério de Von Mises. A figura 15 mostra a geometria ótima obtida para a malha 3.

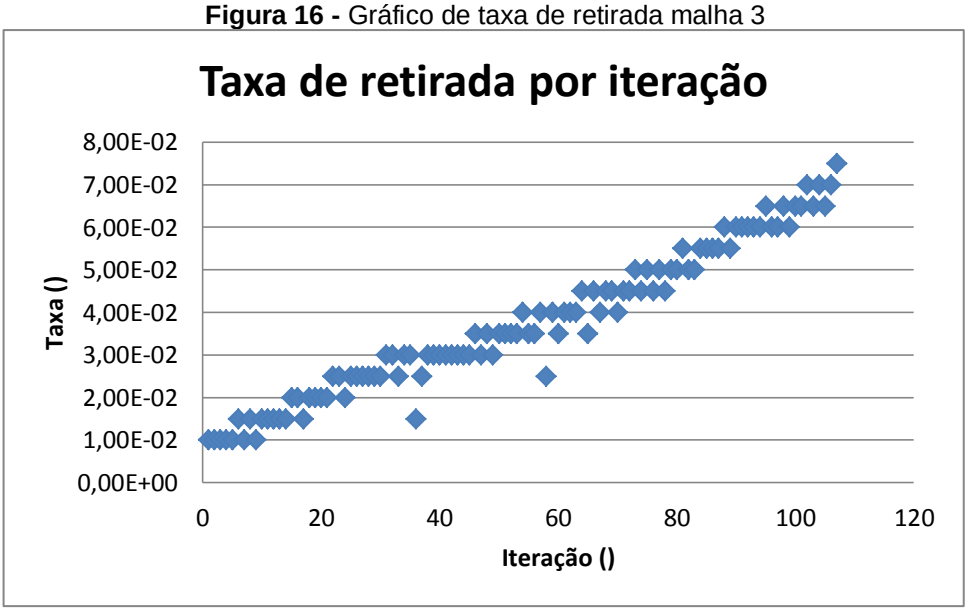
Figura 15 - Geometria ótima para malha 3



Fonte: Autoria própria

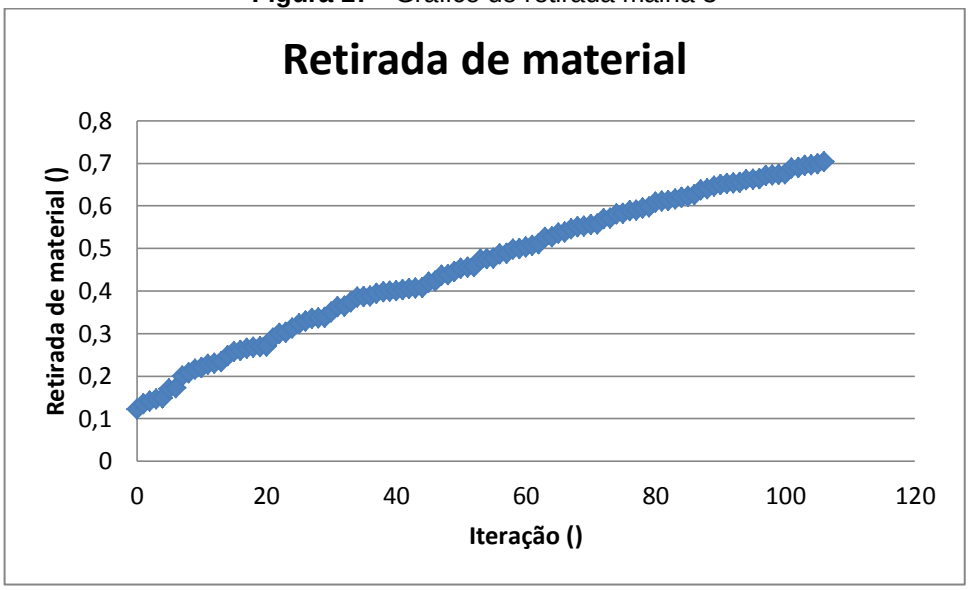
Como nas malhas anteriores, as figuras 16 e 17 mostram o processo evolutivo para a taxa de remoção de material e da quantidade percentual de volume retirado, usando o critério de Von Mises.

Figura 16 - Gráfico de taxa de retirada malha 3



Fonte: Autoria própria

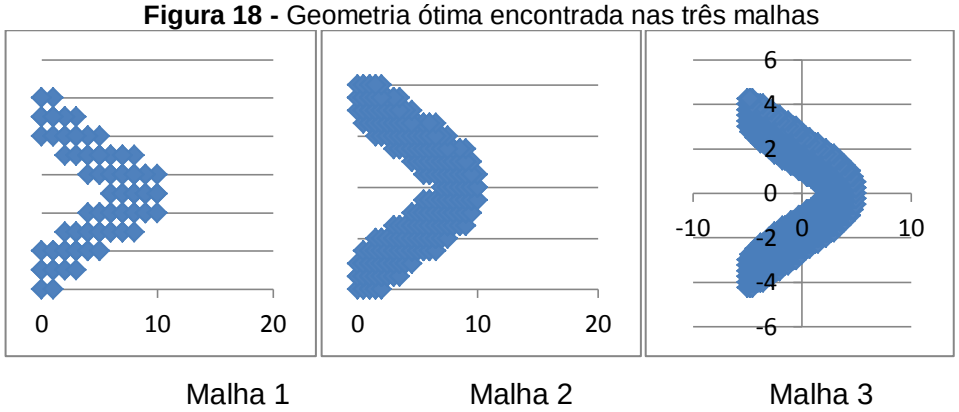
Figura 17 - Gráfico de retirada malha 3



Fonte: Autoria própria

Após observar as três malhas, a primeira conclusão a ser tomada é a de que não ocorreu nenhum problema numérico no processo de otimização topológica, além de não ter sido encontrada interferência da malha no resultado, como pode ser observado na figura 18, as geometrias ótimas encontradas nas três malhas são coerentes e praticamente iguais considerando o nível de refinamento de cada uma.

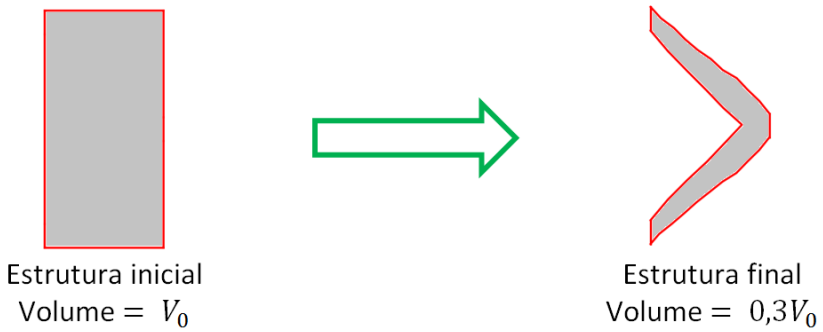
Figura 18 - Geometria ótima encontrada nas três malhas



Fonte: Autoria própria

Por fim, a geometria ótima obtida é comparada à um resultado encontrado na literatura próximo ao exemplo utilizado (figura 19), então pode ser considerado que os resultados encontrados são corretos conforme o esperado.

Figura 19 - Geometria ótima para este problema encontrada na literatura.

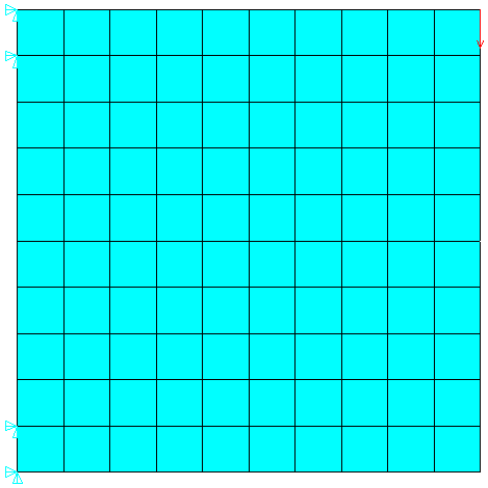


Fonte: OLIVEIRA, 2015.

4.2 EXEMPLO 2

No segundo exemplo, busca-se executar um problema de otimização com solução um pouco mais complexa que o anterior, contudo ainda um problema clássico que tem solução na literatura. O problema consiste de uma chapa de 10 cm x 10 cm de tamanho, sua extremidade esquerda está fixada em dois pontos, na parte superior e inferior, em ambos os fixadores possuem 1 cm. A força é aplicada na extremidade superior direita P= 10 N. A figura 20 abaixo ilustra o esquema estrutural. A espessura da placa é unitária. As propriedades do material utilizadas são: módulo de elasticidade igual a 100 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,2. A estrutura deve ser otimizada para 30% de seu volume inicial.

Figura 20 - Estrutura inicial do exemplo 2



Fonte: Autoria própria

Para este exemplo, são utilizadas três diferentes malhas, sendo de uma mais grosseira a uma mais refinada, como mostrado na figura 21:

Malha 1: 100 elemento de 1 por 1 cm;

Malha 2: 400 elementos de 0,5 por 0,5 cm;

Malha 3: 1600 elementos de 0,25 por 0,25 cm.

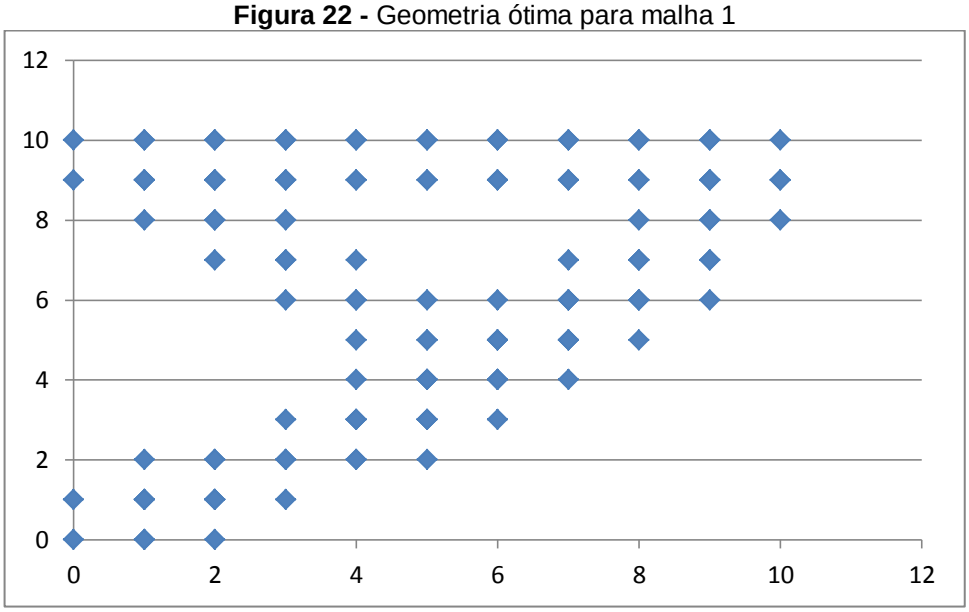
Figura 21 - Malhas de elementos finitos para chapa do exemplo 2

Malha 1 Malha 2 Malha 3

Fonte: Autoria própria

Para a primeira malha, foi utilizado como parâmetro de otimização a taxa de retirada de material de 1% por iteração. Foi também utilizado o critério de Von Mises nesse exemplo. A figura 22 mostra a geometria ótima encontrada para a malha 1.

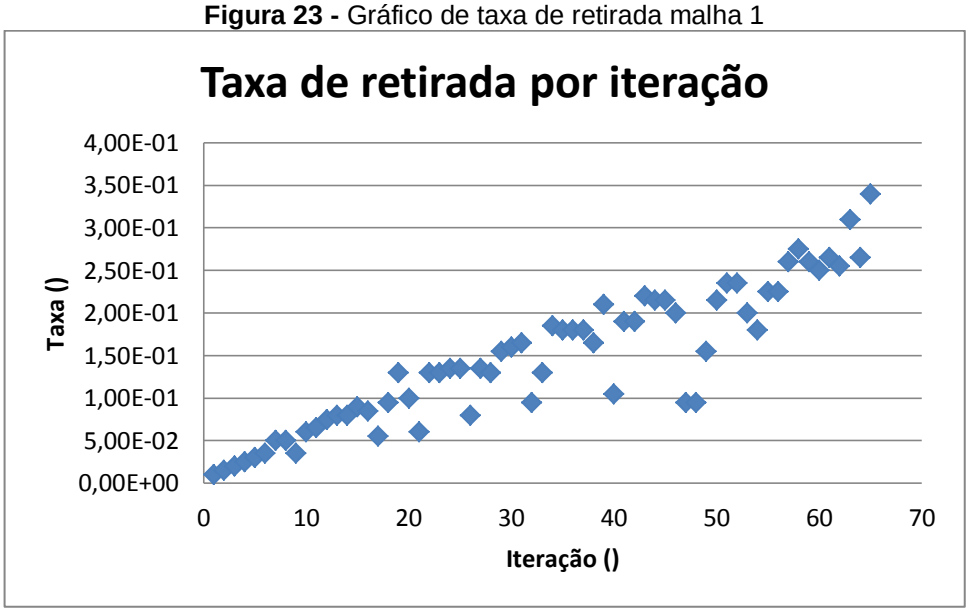
Figura 22 - Geometria ótima para malha 1



Fonte: Autoria própria

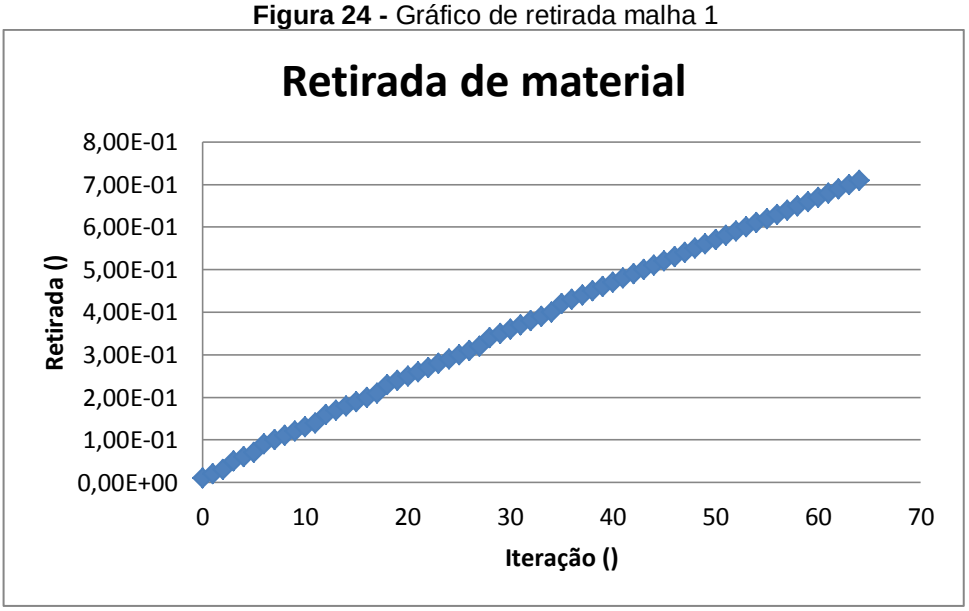
A figura 23 e 24 abaixo resume o processo evolutivo para a taxa de retirada de material e para a quantidade percentual de volume removido, com o uso do critério de Von Mises.

Figura 23 - Gráfico de taxa de retirada malha 1



Fonte: Autoria própria

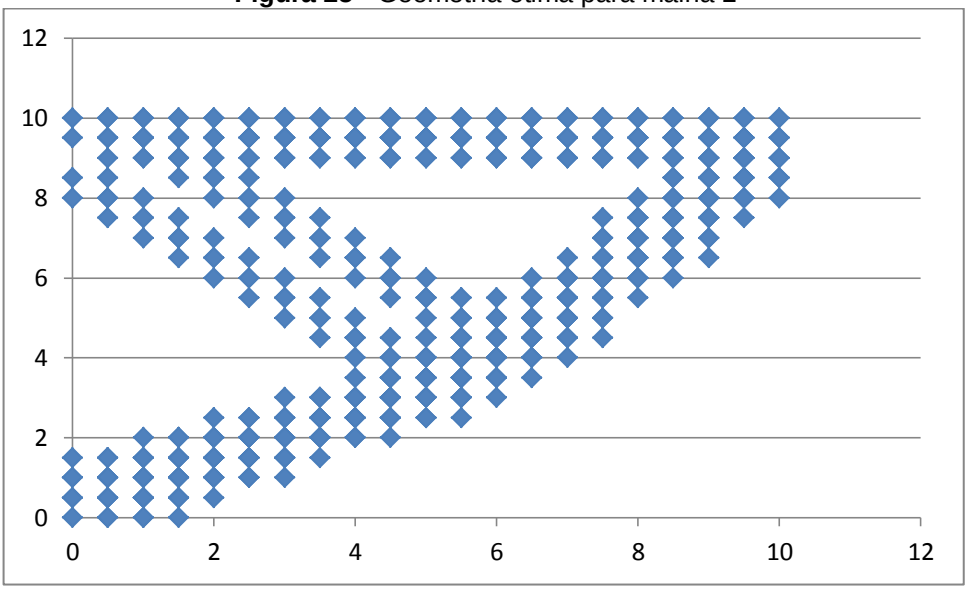
Figura 24 - Gráfico de retirada malha 1



Fonte: Autoria própria

Para a segunda malha, os parâmetros de otimização usados foram exatamente os mesmos da malha 1. Também foi utilizado o critério de von Mises na malha 2. A figura 25 mostra a geometria ótima obtida com a malha.

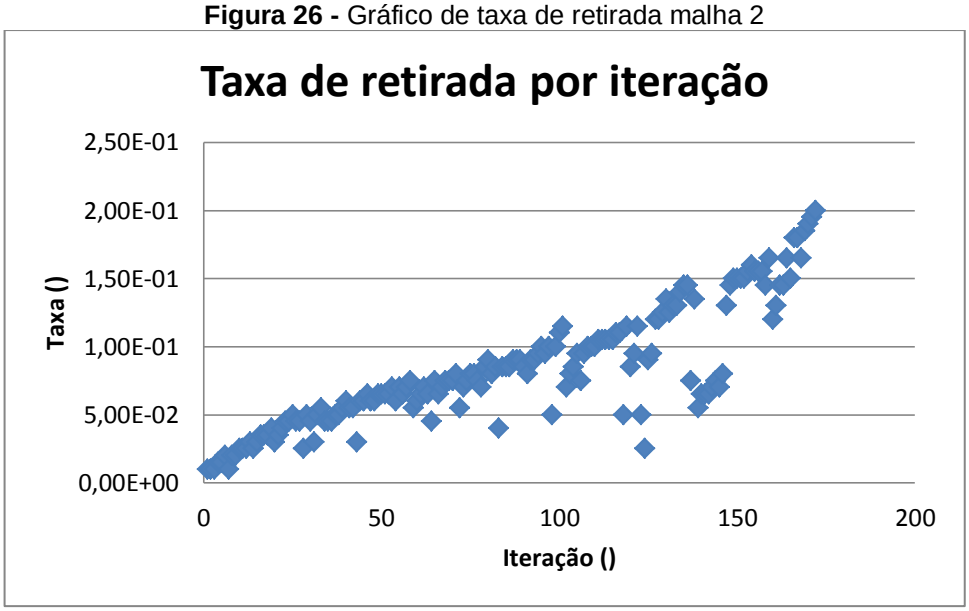
Figura 25 - Geometria ótima para malha 2



Fonte: Autoria própria

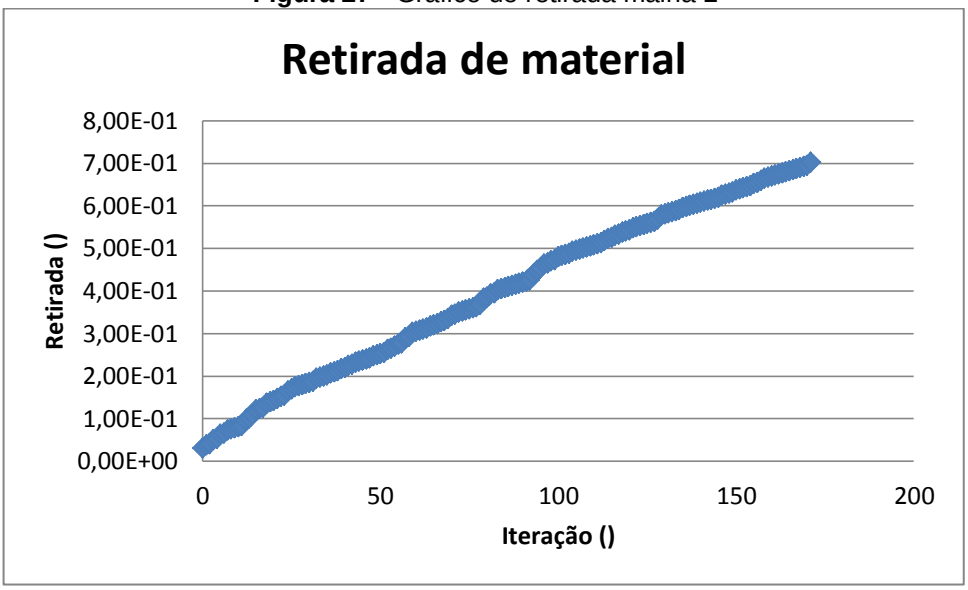
Novamente, são utilizadas as figuras 26 e 27 para demonstrar o processo evolutivo da taxa de remoção e da quantidade percentual de volume removido, também usando o critério de von Mises.

Figura 26 - Gráfico de taxa de retirada malha 2



Fonte: Autoria própria

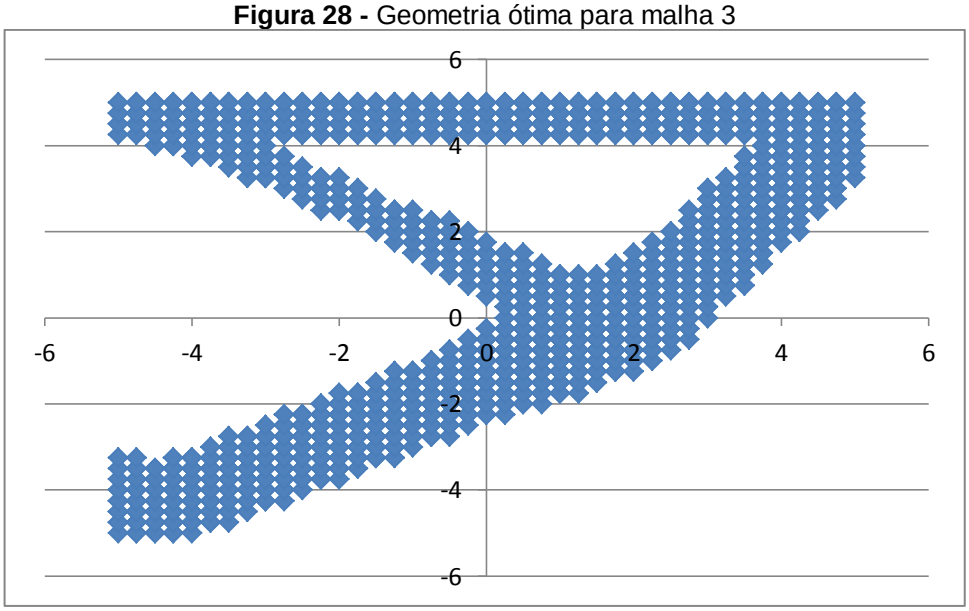
Figura 27 - Gráfico de retirada malha 2



Fonte: Autoria própria

Para a terceira malha, os parâmetros de otimização usados foram os mesmos das malhas anteriores. Assim como anteriormente, foi usado o critério de von Mises. A figura 28 mostra a geometria ótima obtida para a malha 3.

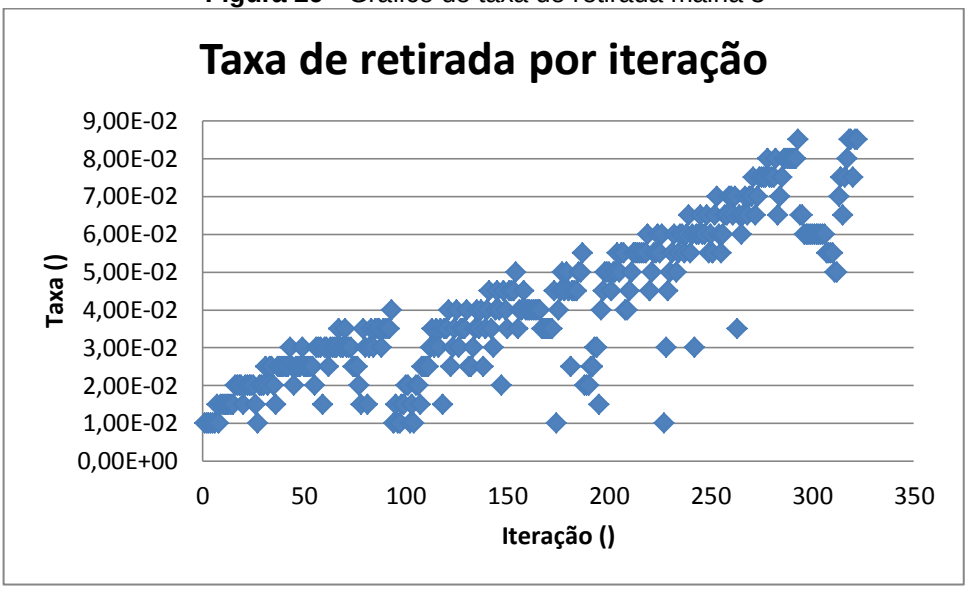
Figura 28 - Geometria ótima para malha 3



Fonte: Autoria própria

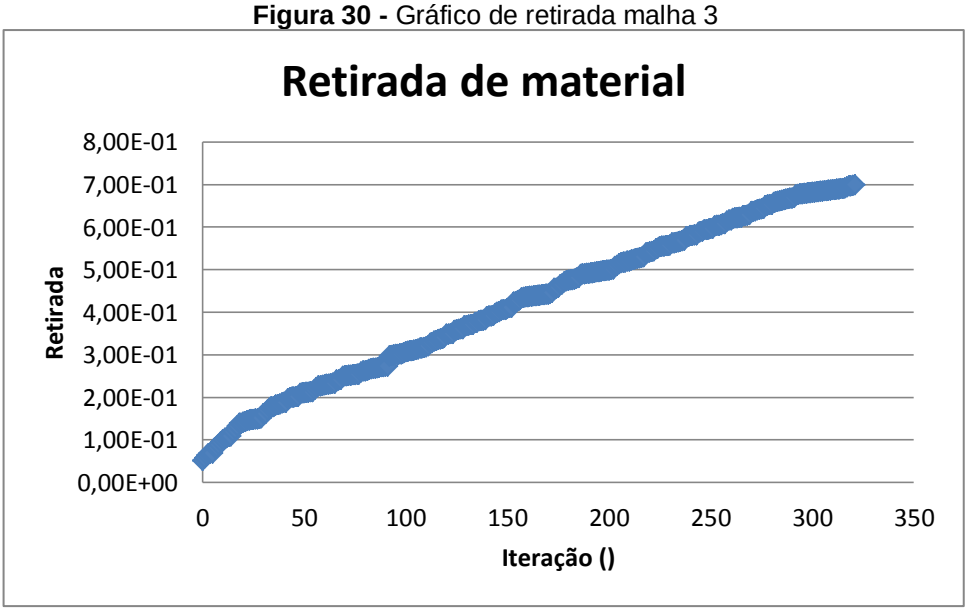
Como nas malhas anteriores, as figuras 29 e 30 mostram o processo evolutivo para a taxa de remoção de material e da quantidade percentual de volume retirado, usando o critério de von Mises.

Figura 29 - Gráfico de taxa de retirada malha 3



Fonte: Autoria própria

Figura 30 - Gráfico de retirada malha 3

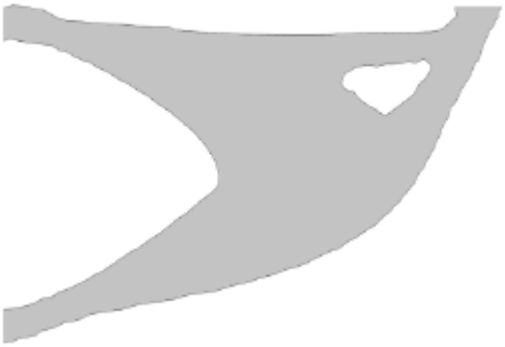


Fonte: Autoria própria

Os resultados obtidos nesse exemplo podem ser considerados satisfatórios. Percebe-se que na malha 2 há em um dos braços uma região sem material que não ocorreu em nenhuma das outras malhas, esse problema pode ser explicado por algum erro numérico nessa malha. Mesmo com o problema na malha 2, pode-se afirmar que as três respostas encontradas são coerentes. Quando comparados a geometria ótima encontrada na literatura (Figura 31), é concluído que o resultado obtido está dentro do esperado, apesar de algumas diferenças de dimensões e do contorno externo, isso pode ser explicado pelo fato de Vitorio Junior (2013) ter

utilizado um algoritmo de otimização baseado no Método dos Elementos de Contorno (MEC) para o cálculo de tensões, diferente do MEF utilizado na pesquisa. Além de diferenças no método de otimização aplicado e a quantidade final de material a ser mantido ao final da otimização, todos esses são fatores que podem explicar as diferenças entre as geometrias obtidas.

Figura 31 - Geometria ótima para este problema encontrada na literatura.

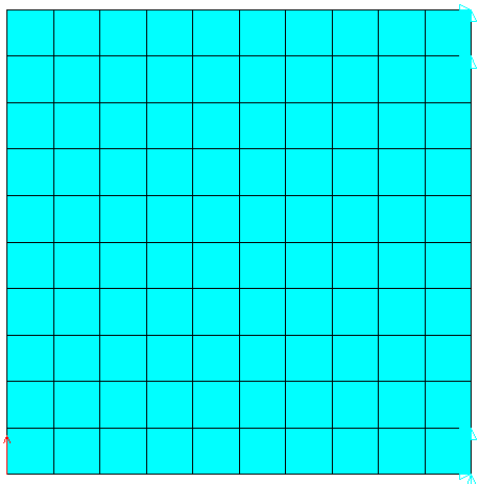


Fonte: VITORIO JUNIOR, 2015, p. 830.

4.3 ESTRUTURA DE GAIOLA

Para alcançar a otimização topológica dessa estrutura, é utilizada uma chapa que possui sua extremidade direita fixada em dois pontos, um na parte superior e outro no inferior, na extremidade esquerda é aplicada uma força F = 1,5 kN, essa força é aplicada na parte inferior da placa e possui seu sentido de baixo para cima. A Figura 32 ilustra o esquema estrutural. A espessura da placa é unitária. As propriedades utilizadas do material são modulo elástico de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0,2. A estrutura será utilizada para volumes variando de 50 a 5% de seu volume inicial.

Figura 32 - Estrutura inicial da gaiola e suas forças.



Fonte: Autoria própria

Para essa estrutura três diferentes malhas são utilizadas, conforme a figura 33:

- Malha 1: 100 elementos de 1 por 1 cm;
- Malha 2: 400 elementos de 0,5 por 0,5 cm;
- Malha 3: 1600 elementos de 0,25 por 0,25 cm;

Figura 33 - Malha de elementos finitos para a gaiola

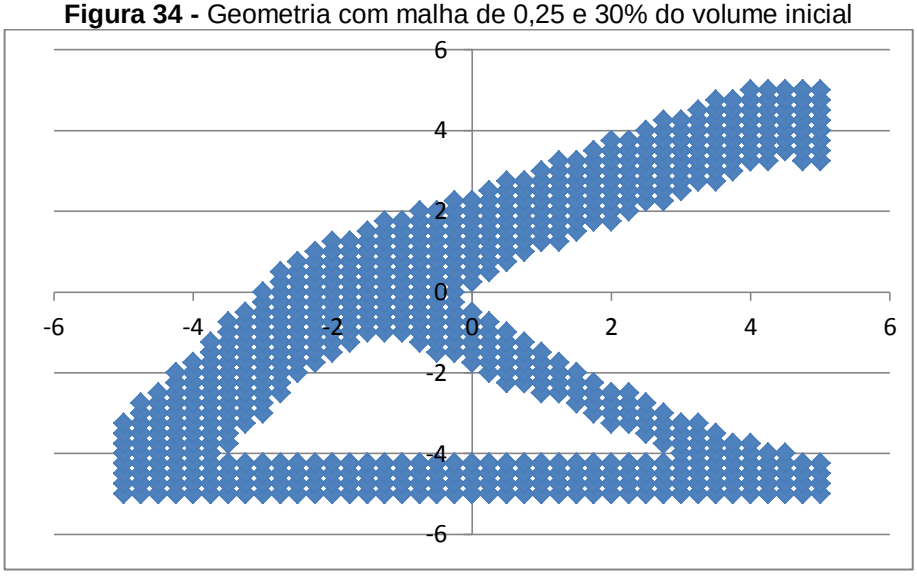
Malha 1 Malha 2 Malha 3

Fonte: Autoria própria

Para as três malhas utilizadas, os parâmetros de otimização utilizados foram os mesmos, sendo taxa de rejeição a cada iteração e passo de aumento dessa razão variando entre 0,5 e 1%, sendo que o aumento realizado foi de 0,25%. Foi utilizado o critério de von Mises para ranquear os resultados.

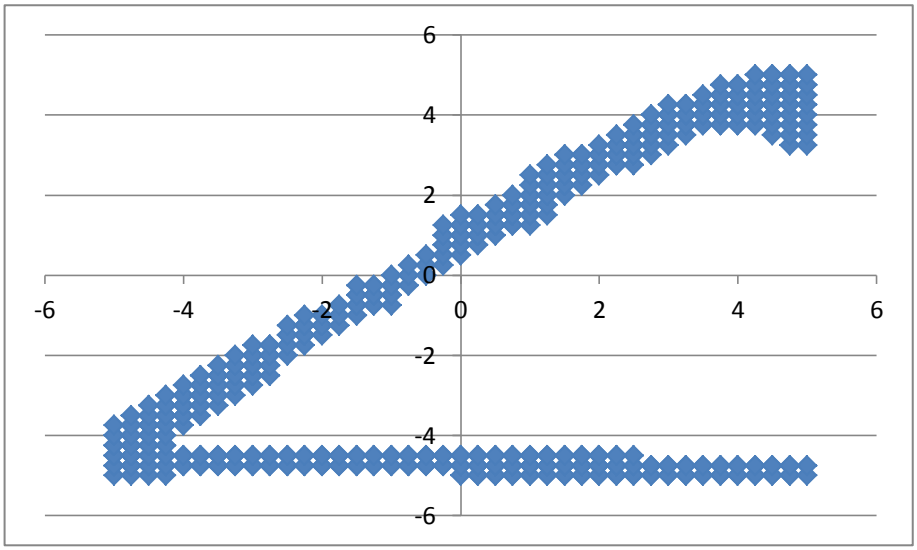
Após diversos resultados utilizando as diferentes malhas e os diferentes parâmetros de otimização, duas diferentes geometrias foram obtidas para o mesmo problema, como mostram as figuras 34 e 35, nas figuras a taxa de retirada utilizada foi de 1%.

Figura 34 - Geometria com malha de 0,25 e 30% do volume inicial



Fonte: Autoria própria

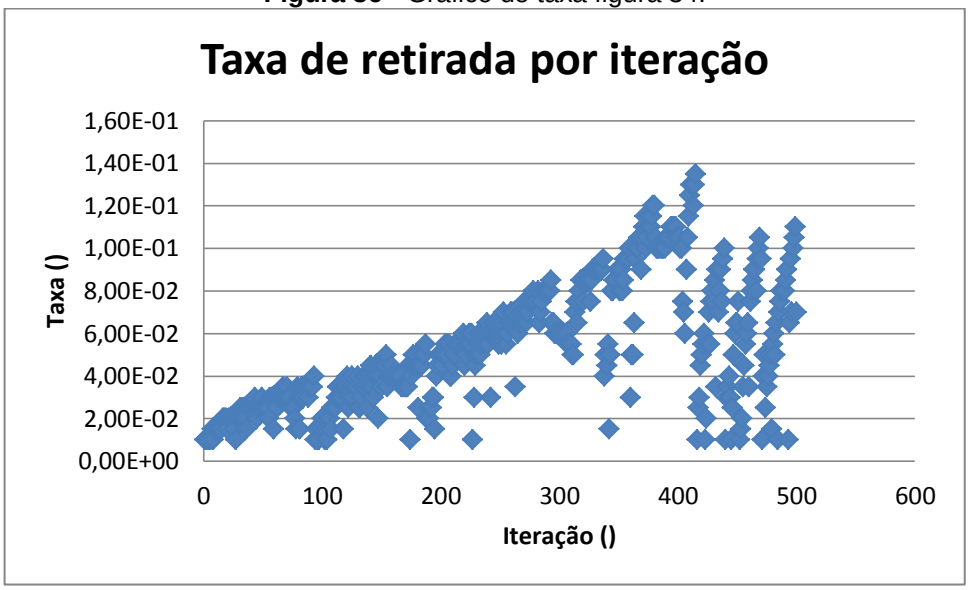
Figura 35 - Geometria com malha de 0,25 e 10% do volume inicial



Fonte: Autoria própria

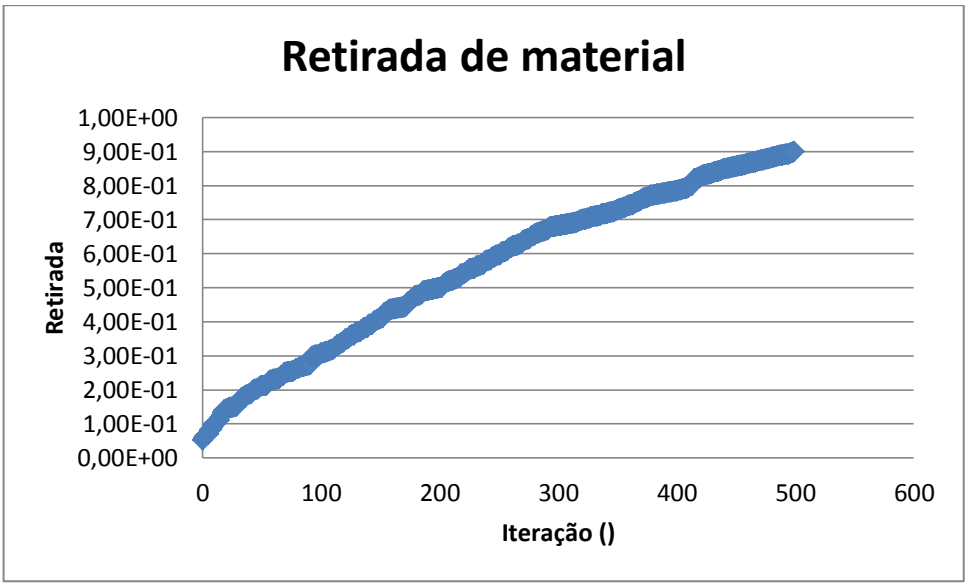
As figuras 36 e 37 abaixo mostram o processo evolutivo para o parâmetro de taxa de remoção por iteração e a quantidade percentual de volume removido em relação ao volume inicial, respectivamente, utilizando o critério de von Mises, para a geometria da figura 34.

Figura 36 - Gráfico de taxa figura 34.



Fonte: Autoria própria

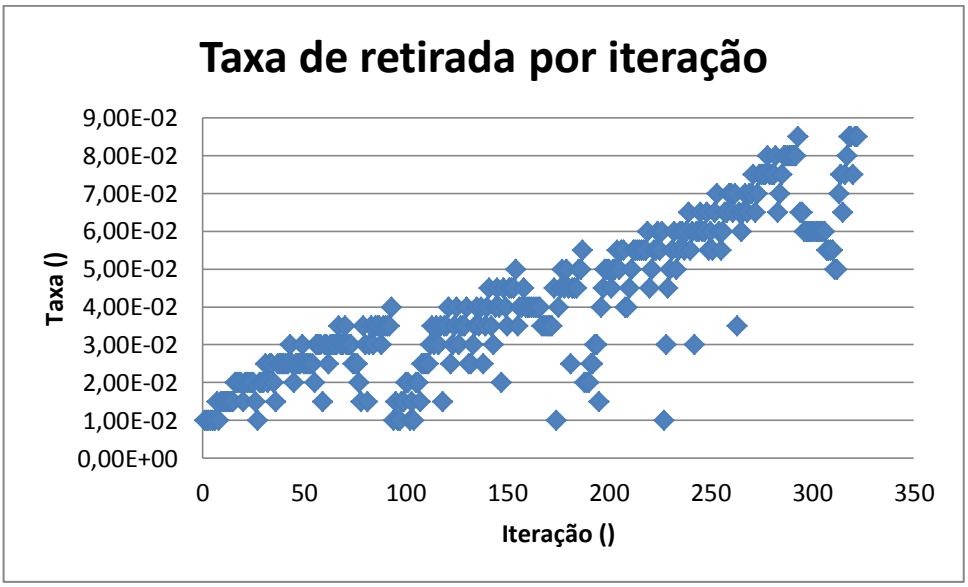
Figura 37 - Gráfico de retirada figura 34.



Fonte: Autoria própria

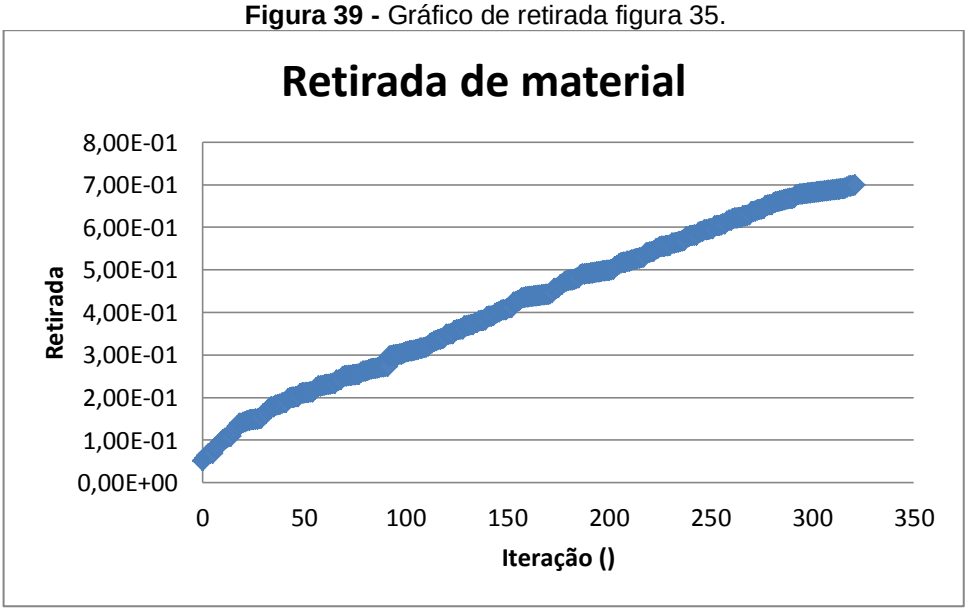
As figuras 38 e 39 abaixo mostram o processo evolutivo para o parâmetro de taxa de remoção por iteração e a quantidade percentual de volume removido em relação ao volume inicial, respectivamente, utilizando o critério de von Mises, para a geometria apresentada na figura 35.

Figura 38 - Gráfico de taxa figura 35.



Fonte: Autoria própria

Figura 39 - Gráfico de retirada figura 35.



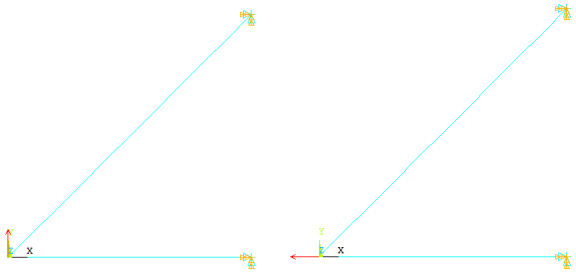
Fonte: Autoria própria

Para se obter a estrutura com menor massa, mas ainda assim boa confiabilidade, as estruturas obtidas pela otimização foram levadas para o programa *Ansys Mechanical student,* para que dessa forma ambas estruturas fossem testadas de diferentes formas e, assim, a melhor escolha entre elas fosse feita. Para o uso no programa, foram usadas as propriedades do aço AISI 4130, que possui modulo de elasticidade de 205 GPa e tensão de escoamento de 435 MPa, o elemento finito utilizado para as analises foi o elemento BEAM 4. Para um melhor estudo do caso, o

diâmetro do tubo utilizado para a simulação foi de 25,4 mm, porém diferentes espessuras de parede foram utilizadas de; 0,75 mm; 0,9 mm; 1 mm; 1,2 mm e por fim 1,5 mm. Além das diferentes espessuras de parede dos tubos, forças com diferentes módulos e em diferentes sentidos e direções foram utilizadas; a força para cima possui modulo de 1,5 kN, forças laterais modulo de 0,75 kN e a força para baixo possui modulo de 0,5 kN.

As geometrias com diferentes combinações de força podem ser observadas abaixo nas figuras 40 a 45 abaixo.

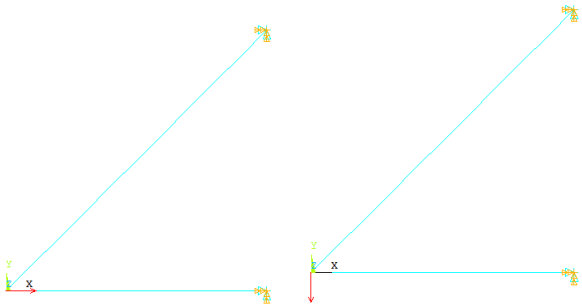
Figura 40 - a) Geometria sem barra com força para cima b) Geometria sem barra com força para esquerda



a b

Fonte: Autoria própria

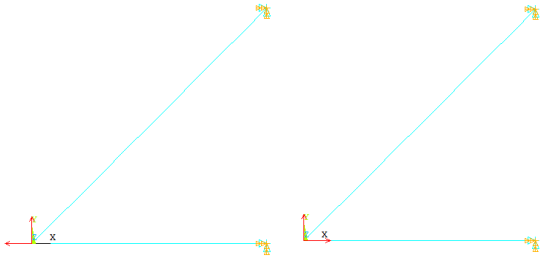
Figura 41 - a) Geometria sem barra com força para direita b) Geometria sem barra com força para baixo



a b

Fonte: Autoria própria

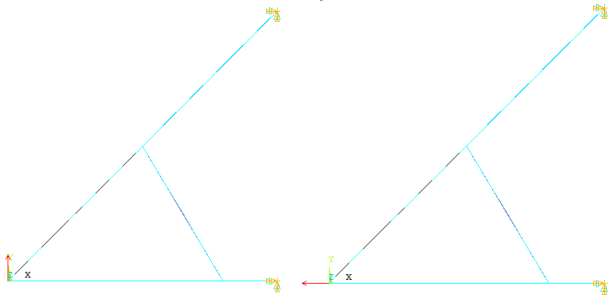
Figura 42 - a) Geometria sem barra com força para cima e esquerda b) Geometria sem barra com força para cima e direita



a b

Fonte: Autoria própria

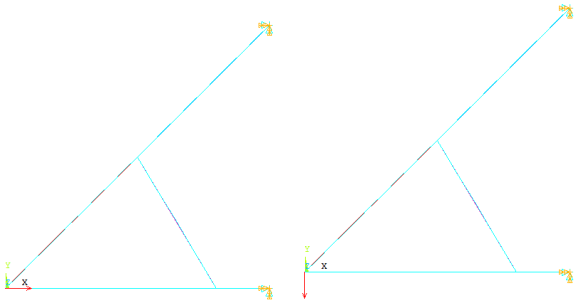
Figura 43 - a) Geometria com barra com força para cima b) Geometria com barra com força para esquerda



a b

Fonte: Autoria própria

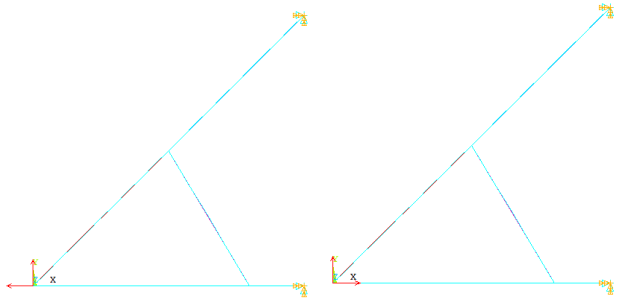
Figura 44 - a) Geometria com barra com força para direita b) Geometria com barra com força para baixo



a b

Fonte: Autoria própria

Figura 45 - a) Geometria com barra com força para cima e esquerda b) Geometria com barra com força para cima e direita



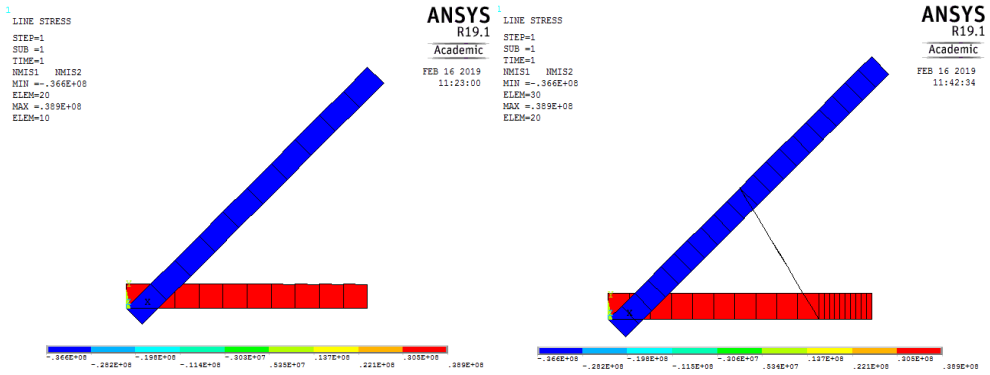
a b

Fonte: Autoria própria

Após testes de diferentes combinações de forças, foi observado que a combinação com a força para cima e força lateral para a esquerda é a que possui maior efeito sobre as estruturas, logo, essa combinação será estudada mais a fundo.

Para a situação crítica, os diferentes tubos com diferentes espessuras de parede foram simulados, suas tensões mostradas como pode ser observado nas figuras 46 a 50.

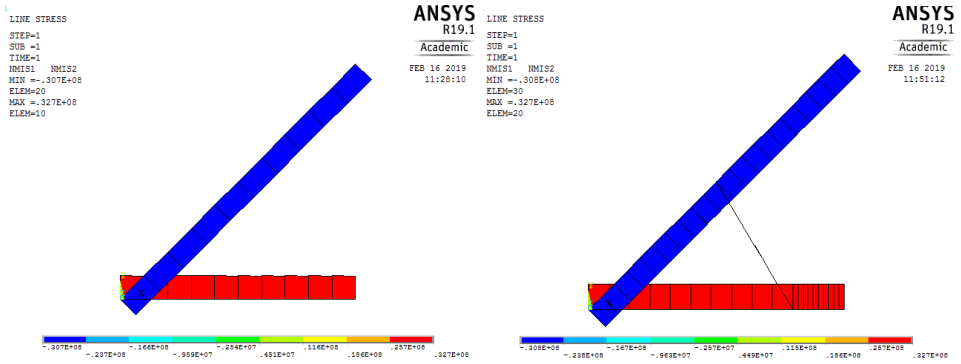
Figura 46 - a) Tensões geometria sem barra parede 0,75. b) Tensões geometria com barra 0,75.



a b

Fonte: Autoria própria

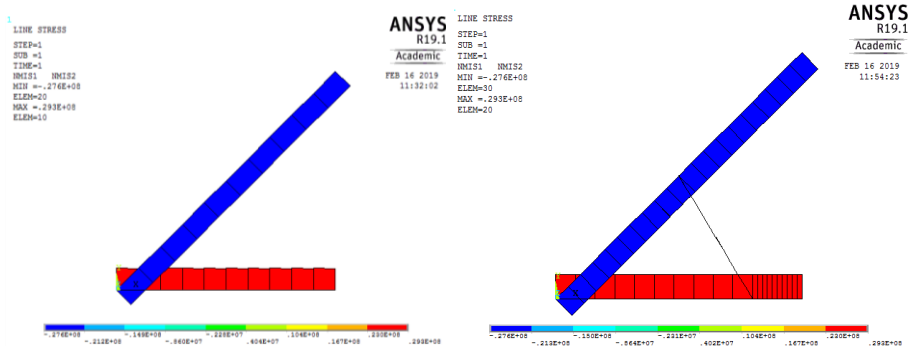
Figura 47 - a) Tensões geometria sem barra 0,9. b) Tensões geometria com barra 0,9.



a b

Fonte: Autoria própria

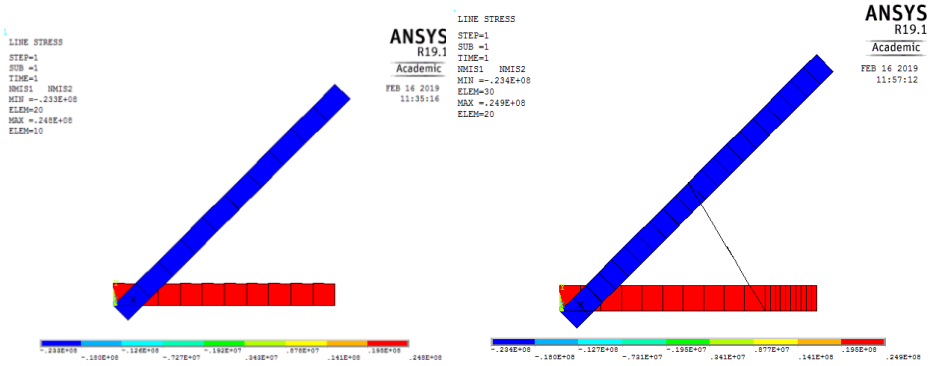
Figura 48 - a) Tensões geometria sem barra 1. b) Tensões geometria com barra 1.



a b

Fonte: Autoria própria

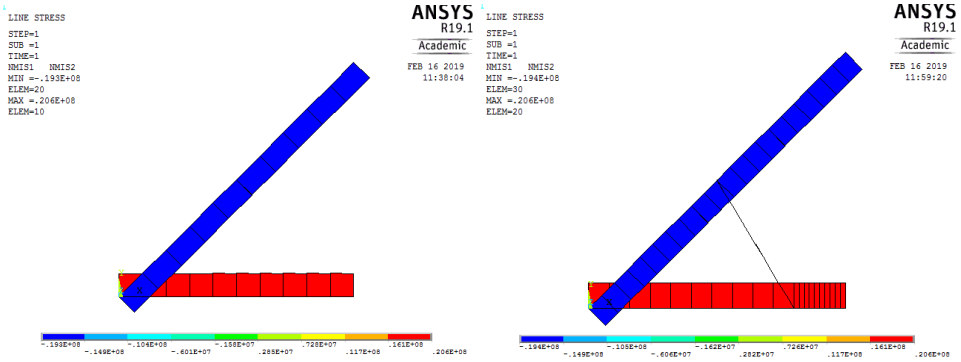
Figura 49 - a) Tensões geometria sem barra 1,2. b) Tensões geometria com barra 1,2.



a b

Fonte: Autoria própria

Figura 50 - a) Tensões geometria sem barra 1,5. b) Tensões geometria com barra 1,5.



a b

Fonte: Autoria própria

As tensões máximas observadas na tabela 1 foram então comparadas às tensões de escoamento do material utilizado.

Tabela 1 - Tensões máximas obtidas no *Ansys.*

Espessura (mm)	Tensão máxima sem barra (MPa)	Tensão máxima com barra (MPa)
0,75	35,9	38,9
0,9	32,7	32,7
1	29,3	29,3
1,2	24,8	24,9
1,5	20,6	20,6

Fonte: Autoria própria

As tensões para todas as diferentes espessuras de parede obtidas foram menores que a tensão do material, o que mostra que em todos os diferentes casos a estrutura suportaria as forças aplicadas sobre ela. Contudo, como também pode ser observado nas figuras as tensões são diferentes em cada uma das barras, o que não caracteriza uma geometria ótima. No caso em que geometrias ótimas são encontradas as tensões que agem sobre as barras devem ser iguais.

É observada uma área de tensões compressivas na geometria, esse tipo de tensão pode causar flambagem da estrutura, foi então feito o cálculo de flambagem global para as diferentes geometrias e as diferentes espessuras de tubo, o cálculo foi feito através da equação 8 abaixo.

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (12)$$

Porém, o valor obtido pela equação acima é dado em Newtons, para se obter tensões o valor P obtido deve ser dividido pela área da parede do tubo. Os valores

de P e das tensões de flambagem global para as diferentes paredes é mostrado na tabela 2 abaixo.

Tabela 2 - Valores de P e tensão em função da espessura da parede

Espessura das paredes (mm)	P critico sem barra (N)	Tensão critica sem barra (MPa)	P critico com barra (N)	Tensão critica com barra (MPa)
0,75	4493,15	77,36	17972,59	309,45
0,9	5296,19	76,46	21184,75	305,83
1	5814,81	75,86	23259,22	303,44
1,2	6812,88	74,68	27251,52	298,72
1,5	8215,41	72,95	32861,63	291,78

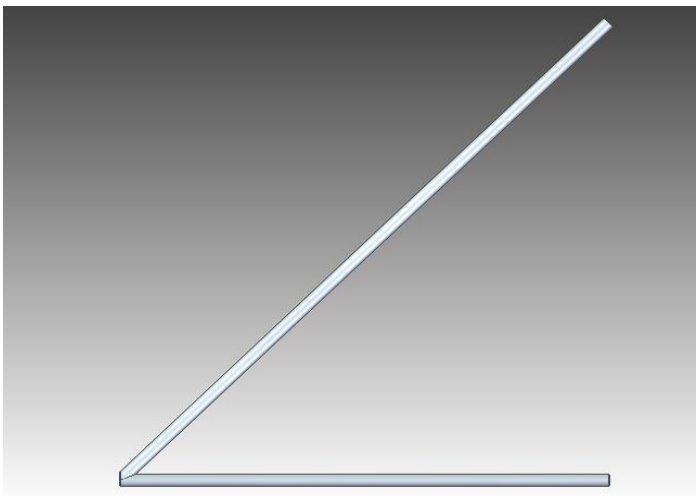
Fonte: Autoria própria

Como observado, os valores de tensão apresentados pelo programa *Ansys* são menores que a tensão de escoamento do material e menor que a tensão de flambagem global para ambas geometrias e para todas as diferentes espessuras de parede. Por esse motivo, pode ser usada a geometria sem a presença da terceira barra, com a espessura de parede de 0,75 mm, mesmo nessa condição a estrutura apresenta um coeficiente de segurança elevado.

A flambagem local das barras não foram levadas em consideração neste trabalho, contudo elas podem demostrar resultados diferentes dos observados usando a tensão de flambagem global. Desta forma é possível que a geometria ótima encontrada não fosse viável considerando a tensão de flambagem local da barra.

A geometria ideal apresentada na figura 51 pela otimização topológica possui grande semelhança com a geometria real utilizada no carro da equipe *EESCuderia Mileage* como pode ser observado na figura 52 abaixo. Essa semelhança permite observar a boa qualidade de resultados que podem ser obtidos pelo método de otimização topológica usando as tensões de von Mises.

Figura 51 – Geometria obtida na otimização



Fonte: Autoria própria

Figura 52 - Geometria utilizada no carro

Fonte: Autoria própria

4.3.1 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Deve-se mencionar que as análises mecânicas e de otimização topológica efetuadas anteriormente foram realizadas em um contexto determinístico. Portanto, tais análises não levaram em consideração a influência das aleatoriedades. É importante destacar que incertezas/aleatoriedades estão inerentemente presentes em todos os fenômenos mecânicos que governam os problemas de engenharia. Para que tal influência seja adequadamente considerada em análises numéricas, os problemas mecânicos considerados anteriormente devem ser analisados no contexto probabilístico. Assim, para que as incertezas sejam quantificadas, algoritmos de confiabilidade devem ser incorporados na análise. No presente trabalho, objetivando a quantificação de incertezas, foram efetuadas Simulações de

Monte Carlo para ambas as topologias encontradas. Deste modo, a confiabilidade das soluções poderá ser verificada.

Com o intuito de realizar essas simulações, foi disponibilizado pelo Prof. Dr. Edson Denner Leonel um programa em linguagem FORTRAN, elaborado no trabalho de conclusão de curso intitulado “Desenvolvimento de modelo numérico para otimização topológica de estruturas planas utilizando o método dos elementos finitos e análise por metodologia de confiabilidade estrutural” desenvolvido pelo aluno Rodrigues Neto (2016), o qual objetivou o desenvolvimento de uma formulação numérica baseada em elementos finitos de treliça para a análise mecânica-probabilística.

Nas simulações efetuadas nesse trabalho, foram consideradas incertezas em diferentes aspectos, tais como: módulo médio da força aplicada sobre a estrutura e ângulo de incidência da força sobre a estrutura. Deve-se também mencionar que a área da seção transversal das barras consideradas na análise foi assumida como aleatória. Além dela, a tensão de escoamento do material foi assumida como parâmetro aleatório. As variáveis aleatórias consideradas nesse trabalho são não correlacionadas, ou seja, elas não dependem uma da outra no problema. Para todas as variáveis aleatórias citadas anteriormente a distribuição da curva gaussiana foi levada em considerada.

Distribuições estatísticas foram individualmente atribuídas a cada uma das variáveis aleatórias do problema. Considerando as geometrias descritas nas figuras 34 e 35, os seguintes parâmetros aleatórios foram considerados:

Tabela 3 - Incertezas para geometria da figura 35

Incertezas	Médio	cov
Módulo da força (N)	1500	166,67
Ângulo	0	25,98
Área da seção transversal (m)	$9{,}1x10^{-5}$	$4{,}6x10^{-6}$
Tensão de escoamento (Pa)	$205x10^{9}$	$205x10^{7}$

Fonte: Autoria própria

Tabela 4 - Incertezas para geometria da figura 34

Incertezas	Médio	cov
Módulo da força (N)	1500	166,67
Ângulo	0	25,98
Área da seção transversal (m)	$4{,}5x10^{-5}$	$2{,}3x10^{-6}$
Tensão de escoamento (Pa)	$205x10^{9}$	$205x10^{7}$

Fonte: Autoria própria

Deve-se mencionar que os valores contidos nas duas tabelas acima foram especificados pelo autor com base em sua experiência na análise, modelagem e implementação do veículo do grupo *EESCuderia Milleage*.

Inicialmente, os arquivos de entrada de dados do programa foram modificados levando em conta as diferentes geometrias obtidas, assim como os diferentes dados a serem variados. A fim de obter valores de convergência de resultados, foram analisados conjuntos variando de 50 até 100000 amostras, como podem ser observados nas figuras 52 e 53 abaixo.

Objetivando a determinação da falha ou sucesso das topologias, foram considerados como estados limites último a ruptura da barra por escoamento da seção transversal e perda de estabilidade da barra por flambagem. Assim, nas barras tracionadas apenas o primeiro estado limite último é considerado. Já nas barras comprimidas, ambos estados limites são verificados. Dessa forma, os dois estados limites anteriormente mencionados podem ser expressos como:

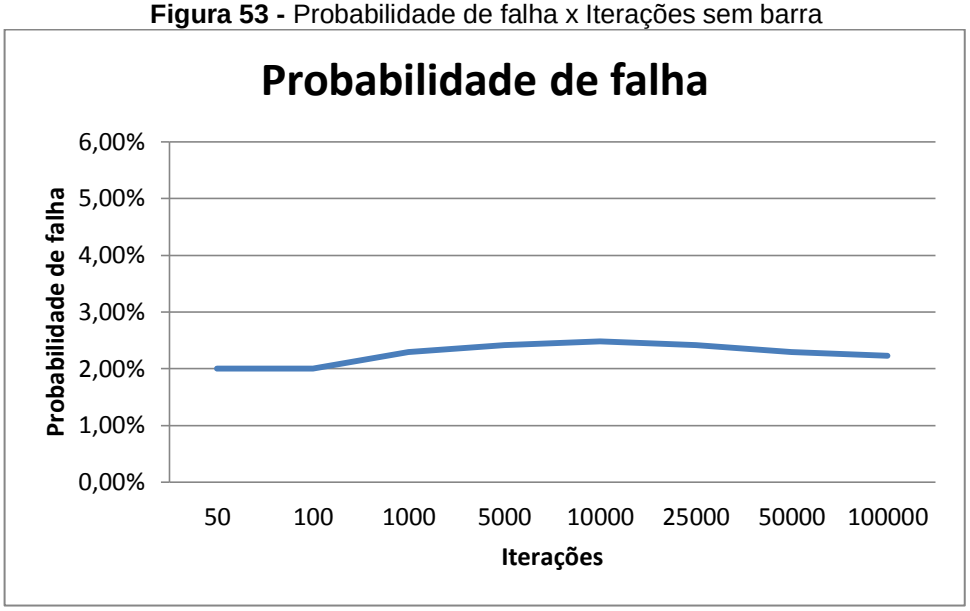
$$\sigma_{máx} \leq \sigma_{esc} \quad para\ barras\ tracionadas\ e\ comprimidas \tag{13}$$

$$\sigma_{máx} \leq \sigma_{flamb} \quad para\ carras\ comprimidas \tag{14}$$

Em que o $\sigma_{máx}$ é a tensão calculada na estrutura, σ_{esc} se refere a tensão de escoamento do material utilizado e σ_{flamb} é o valor critico calculado da flambagem no componente.

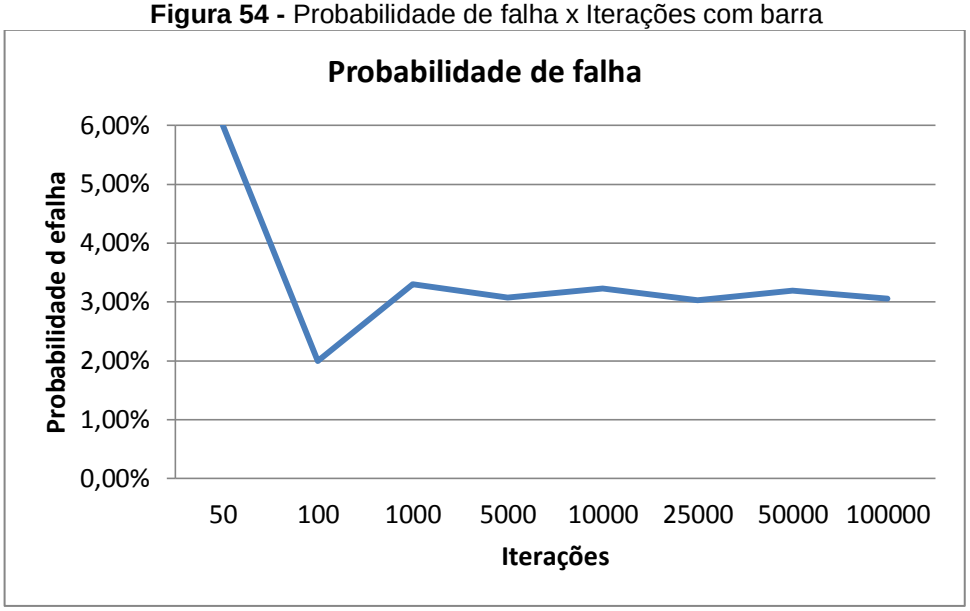
A evolução da probabilidade de falha da estrutura em função do tamanho da amostra (Iterações) pode ser observada nas figuras 53 e 54.

Figura 53 - Probabilidade de falha x Iterações sem barra



Fonte: Autoria própria

Figura 54 - Probabilidade de falha x Iterações com barra



Fonte: Autoria própria

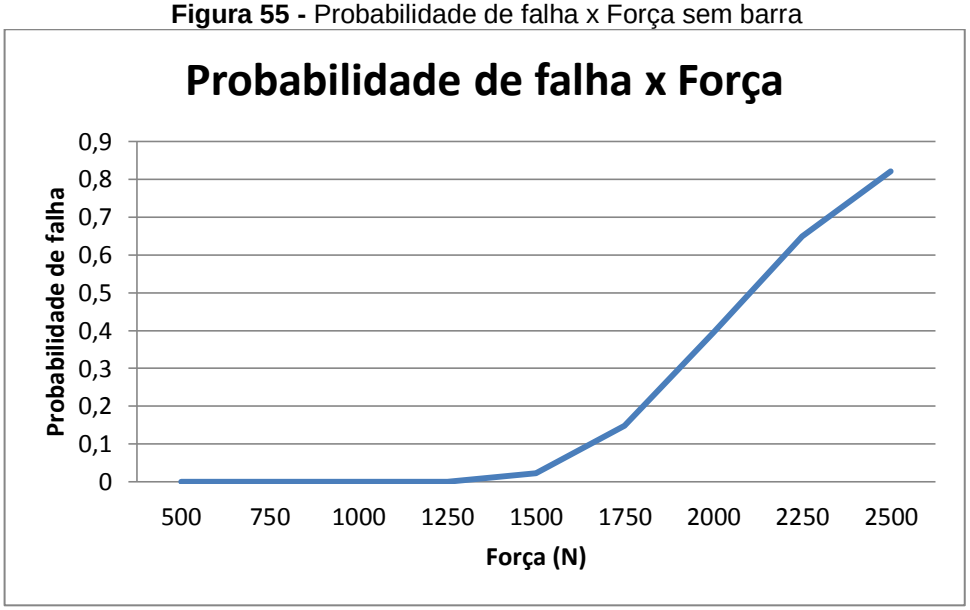
Os gráficos apresentados nas figuras 52 e 53 permitem observar que há convergência de resultados após 1000 iterações para as ambas as geometrias analisadas.

Torna-se interessante também analisar a evolução da probabilidade de falha à medida que a média da intensidade da força aplicada é aumentada. Para tanto, foram efetuadas análises complementares onde a média da força aplicada variou no intervalo de 500 N a 2500 N. O incremento de força nesse intervalo foi de 250 N. Deve-se mencionar que embora a média da força variasse em cada análise, o

coeficiente de variação foi mantido constante, de forma a não descaracterizar a variável aleatória. Essas análises suplementares foram efetuadas considerando uma amostra de tamanho igual a 50000 valores. Nas análises suplementares, apenas os valores aleatórios do módulo da aplicada foram alterados. Os demais parâmetros foram considerados iguais aos apresentados nas tabelas 3 e tabela 4.

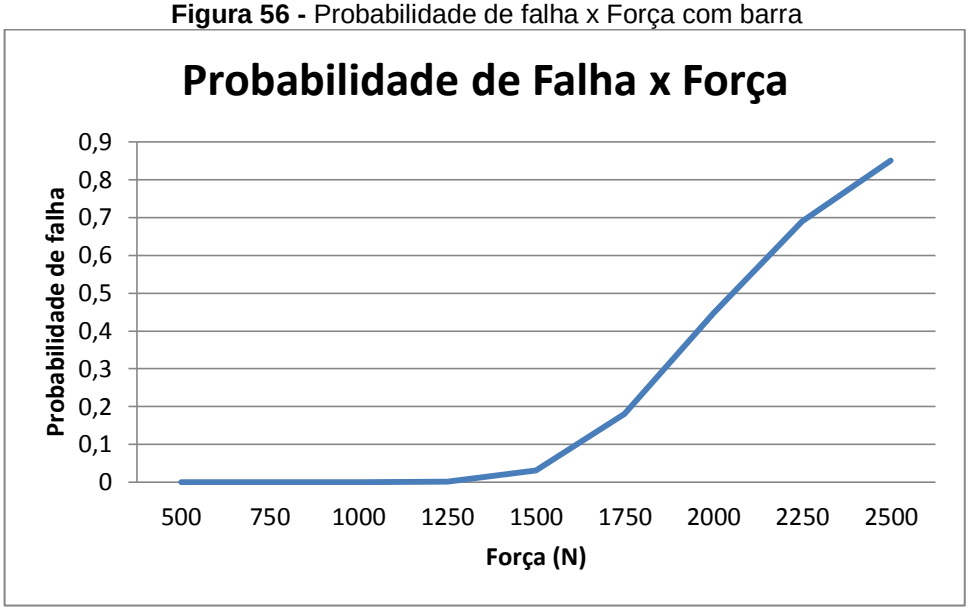
Os resultados alcançados para as análises suplementares, ou seja, evolução da probabilidade de falha com o aumento da média da força aplicada estão apresentados nas figuras 55 e 56.

Figura 55 - Probabilidade de falha x Força sem barra



Fonte: Autoria própria

Figura 56 - Probabilidade de falha x Força com barra



Fonte: Autoria própria

Depois de analisar as duas figuras anteriormente apresentadas, pode-se perceber que nos dois casos há um aumento considerável da probabilidade de falha quando o módulo da força média aplicada ultrapassa 1500 N. Portanto, esse valor poderá ser utilizado como parâmetros indicativo pela *EESCuderia Milleage* em projetos futuros.

5. CONCLUSÃO

Para o trabalho, foi desenvolvido um programa utilizando o método dos elementos finitos (MEF), através do elemento finito quadrilateral, esse programa foi então acoplado ao método ESO, para assim se obter o programa de otimização topológica utilizada no trabalho.

A partir dos exemplos analisados durante o trabalho verifica-se que os resultados obtidos em ambos os exemplos são satisfatórios, os resultados obtidos se assemelham àqueles mostrados na literatura dos mesmos exemplos.

O resultado obtido na geometria da gaiola também foi muito satisfatório, já que a partir das análises feitas as estruturas obtidas foram mostradas como as ótimas, a equipe *EESCuderia Mileage* por esse motivo utilizou geometrias semelhantes as encontradas em seu carro.

Além disso, é possível observar que o uso da otimização topológica aliada ao uso de programas de simulação estrutural é capaz de produzir resultados muito positivos levando em consideração a redução de peso e uma elevada confiabilidade da geometria obtida, essa boa relação entre a otimização e a simulação foi observada na estrutura de gaiola e na estrutura de fixador da roda, nesses exemplos as estruturas obtidas apresentaram grande redução de volume inicial, o que resultou na redução de peso sem a perda de confiabilidade nas peças. Esse conjunto de técnicas pode ser usado em diversas empresas na fase de projeto para redução do material utilizado em peças estruturais e dessa forma conseguir uma redução de peso dos produtos, assim como uma economia em relação aos materiais.

Contudo, foi também observado que apenas o uso da otimização topológica pode não ser totalmente interessante, sendo aconselhável seu uso com metodologias de simulação, como a simulação de Monte Carlo que foi utilizada nesse trabalho. Dessa forma, a quantificação de incertezas poderá ser adequadamente efetuada com o objetivo de indicar a segurança do projeto.

6. REFERENCIAS

ANG, A.H-S.; TANG, W.H. ***Probability Concepts in Engineering Planning and Desing***.Vol 2 – Decision, Risk and Reliability, New York: John Wiley & Sons, 1984

BECK, A.T. ***Curso de Confiabilidade Estrutural***, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015

BENDSØE, M.P.; SIGMUND, O. ***Topology optimization***: *Theory, Methods and Application*. Berlin: Springer-Verlag, 2003

BORTOLI, A.L.; CARDOSO, C.; FACHIN, M.P.G.; CUNHA, R.D. ***Introdução ao Cálculo Numérico***. 2ª ed. Departamento de matemática pura e aplicada, Instituto de matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001

CHAPMAN, S.J. ***Fortran 95/2003 for Scientists and Engineers***. 3rd. Edition. McGraw-Hill, 2008

CHO, K.H.; PARK, J.Y.; IM, M.G.; HAN, S.Y. Reliability-based topology optimization of electro-thermal-compliant mechanisms with a new material mixing method. ***Int J Precis Eng Manuf***, 13(5):693–9, 2012.

CHO, K.H.; PARK, J.Y.; RYU, S.P.; PARK, J.Y.; HAN, S.H. Reliability-based topology optimiza- tion based on bidirectional evolutionary structural optimization using multi-objec- tive sensitivity numbers. ***Int J Automot Technol***, 12(6):849–56, 2011.

CHU, D.N.; XIE, Y.M.; HIRA, A.; STEVEN, G.P. ***Evolutionary Structural optimization for problems with stiffness constraints Finite Elements in Analysis and Design***, v. 21, p. 239-251, 1996.

COUTINHO, K.D. ***Método de otimização topológica em estruturas tridimensionais***. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboad Patterns in Layout Optimization. ***Structural Optimization***, v. 10, p. 40-45, 1995. Disponível em: http://www.giref.ulaval.ca/~deteix/bois/documents_references/sigmund1995.pdf .Acesso em: 10 jan. 2018.

EOM, Y.S.; YOO, K.S.; PARK, J.Y.; HAN, S.Y. Reliability-based topology optimization using a standard response surface method for three-dimensional structures. ***Struct Multi- discip Optim***, 43(2):287–95, 2011.

LEONEL, E.D. Modelos não-lineares do Método dos Elementos de Contorno para a análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas a fadiga. ***Tese (Doutorado)***, EESC-USP, 2009.

FERNANDES, W.S. Estudo de otimização topológica em estruturas 2D considerando a não linearidade geométrica. ***Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)*** – Escola de Minas, Universidade Federal de Outro Preto, Ouro Preto, 2013.

HIBBELER, R.C. ***Resistência dos Materiais***. 8ª ed. São Paulo: Pearson, 2012.

JOG, C.S.; HABER, R.B. Stability of finite element model for distributed parameter optimization and topology design. ***Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering***. v. 130, p.203-226, 1996.

KANAKASABAI, P.; DHINGRA, A.K. An efficient approach for reliability-based topology optimization. ***Eng Optim,*** 48(1):1–15, 2016.

KHARMANDA, G.; OLHOFF, N.; MOHAMED, A.; LEMAIRE, M. Reliability-based topology optimization. ***Struct Multidiscip Optim***, 26(5):295–307, 2004.

KIM, C.; WANG, S.; BAE, K.R.; MOON, H.; CHOI, K.K. Reliability-based topology optimization with uncertainties. ***J Mech Sci Technol***, 20(4):494–504, 2006.

LANES, R.M. Investigação de um método de otimização topológica evolucionária desenvolvido em script. 133 f. ***Tese (Mestrado em Engenharia da Estruturas)*** – Escola de Engenharia da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

NGUYEN, T. H.; SONG, J.; PAULINO, G. H. Single-loop system reliability-based topology opti- mization considering statistical dependence between limit-states. ***Struct Multidiscip Optim***, 44(5):593–611, 2011.

OLIVEIRA, H.L. Desenvolvimento de modelos numéricos para análises de otimização topológica probabilística utilizando o método dos elementos de contorno. ***Tese (Exame de qualificação de Doutorado)*** – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

OWEN, D.R.J.; HINTON, E. ***Finite Elements in Plasticity*** – Theory and Pratice. Swansea, U.K.: McGraw-Hill, 1980.

PANTOJA, J.C.; da SILVA, T.S.; NARVAEZ, N.S. ***Avaliação de segurança de punção em lajes cogumelo com armadura de cisalhamento via analise de confiabilidade***. Researchgate, 2016.

PITANGUEIRA, R. ***Introdução ao Método dos Elementos Finitos****:* Notas de aula do Curso Teoria das Estruturas III. Escola de Engenharia, UFMG, 2003.

QUERIN, O. M. Evolutionay structural optimization stress based formulation and implementation. **Tese (Doutorado)**. Sydney, Australia: University of Sydney, 1997.

RODRIGUES NETO, A. Desenvolvimento de modelo numérico para otimização topológica de estruturas planas utilizando o método dos elementos finitos e análise por metodologia de confiabilidade estrutural. ***Trabalho de Conclusão de Curso***. São Carlos, São Paulo. Universidade de São Paulo, 2016.

SANCHES, R.P. Otimização estrutural evolucionária usando malhas hexagonais. ***Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)*** – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Campinas, 2011.

SANT'ANNA, H.M. Otimização topológica de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão. ***Dissertação. (Mestrado em Engenharia Mecânica)*** - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

SIGMUND, O. On the design compliant mechanisms using topology optimization. ***Mechanics of Structures and Machines***, v. 25, n. 4, p. 493-524, abr. 1997.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. ***Numerical instabilities in topology optimization***: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local

minima. Structural Optimization, Springer-Verlag, v. 16, p. 68-75, 1998. Disponível em: http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/reverson/ uploads/MoodSwings/sigmundpertersen- review.pdf. Acesso em: 10 out. 2017.

TANSKANEN, P. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ***Elsevier***, v. 191, n. 47-48, 2002, 5485-5498.

TU, J. , CHOI, K.K. , PARK, Y.H. . A new study on reliability-based design optimization. ***J Mech Des***, 1999; 121(4):557–64.

VITORIO JUNIOR, P.C.; LEONEL, E.D. Level set analysis of topology optimization in 2D structures using boundary element method. ***1st Pan-American Congress on Computational Mechanics*** – PANACOM 201. p. 823-833, 2015

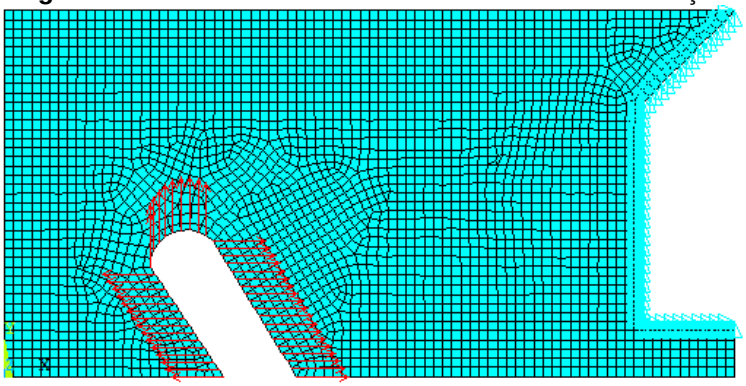
YOO, K.S.; EOM, Y.S.; PARK, J.Y.; IM, M.G.; HAN, S.Y. Reliability-based topology optimiza- tion using successive standard response surface method. ***Finite Elem Anal Des***, 47(7):843–9, 2011.

APÊNDICE A

Estrutura de fixador de roda

Para se obter a otimização topológica da estrutura estudada foi utilizada uma geometria simplificada da peça utilizada no carro da equipe EESCuderia Mileage, essa geometria inicial possui as dimensões de corpo de 20x10 cm, a geometria é fixada em seu lado direito, e possui um rasgo próximo a outra extremidade, nesse rasgo forças com diferentes direções e módulos foram aplicadas, a força para cima possui módulo de 0,75 kN/m, as forças laterais para a direita e para a esquerda possuem módulo de 0,5 kN/m, as propriedades do material utilizadas para o uso da técnica de otimização foi módulo elástico de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0,2. A estrutura inicial terá redução de seu volume variando entre 50 e 70%. A figura a1 ilustra a geometria inicial e as forças aplicadas sobre ela.

Figura a1 - Estrutura inicial do fixador de roda e suas forças

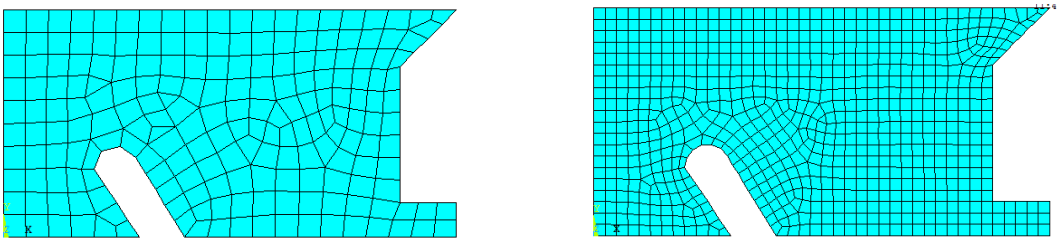


Fonte: Autoria própria

Para essa estrutura três diferentes malhas são utilizadas, conforme a figura a2:

- Malha 1: elementos de 1 por 1 cm;
- Malha 2: elementos de 0,5 por 0,5 cm;

Figura a2 - Malha de elementos finitos para o fixador.



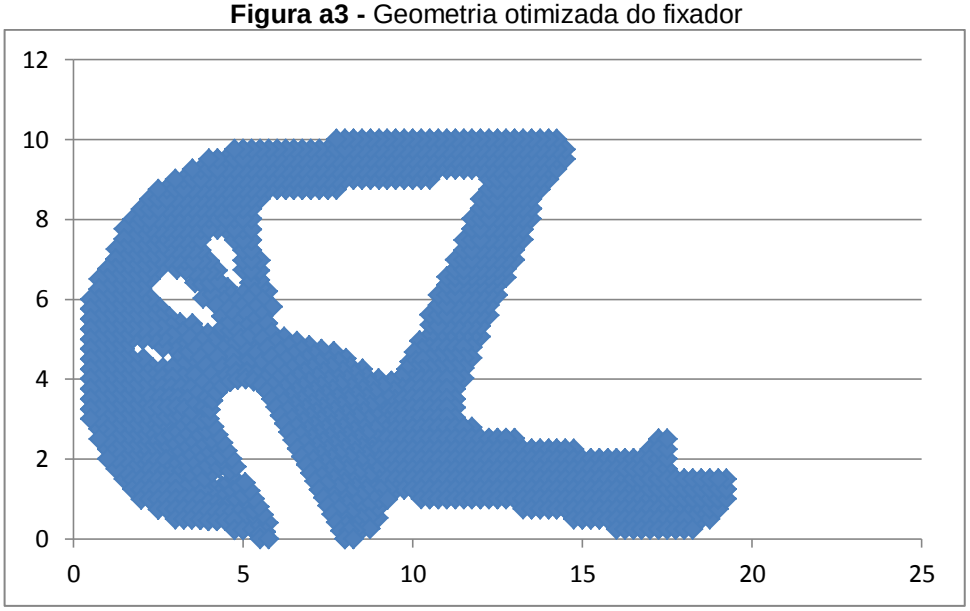
Malha 1 Malha 2

Fonte: Autoria própria

As malhas foram utilizadas para todas as variações de retirada de material, além disso a taxa de rejeição para as malhas 1 e 2 variou entre 1 e 0,5%, realizando uma redução de 0,25%.

Houve convergência das geometrias encontradas; a geometria que será testada mais a diante pode ser observada na figura a3; que possui taxa de retirada por iteração de 1% e possui 40% do volume inicial da geometria.

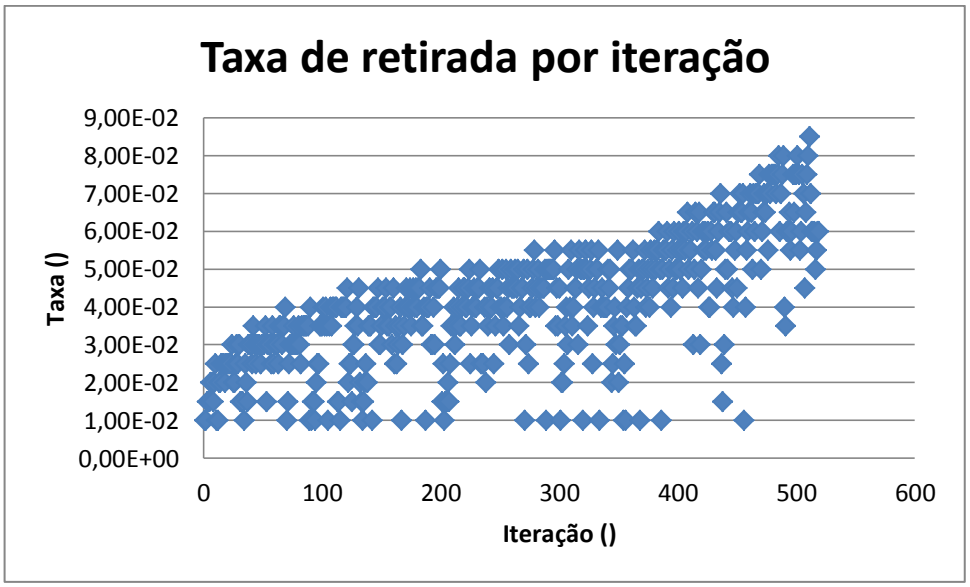
Figura a3 - Geometria otimizada do fixador



Fonte: Autoria própria

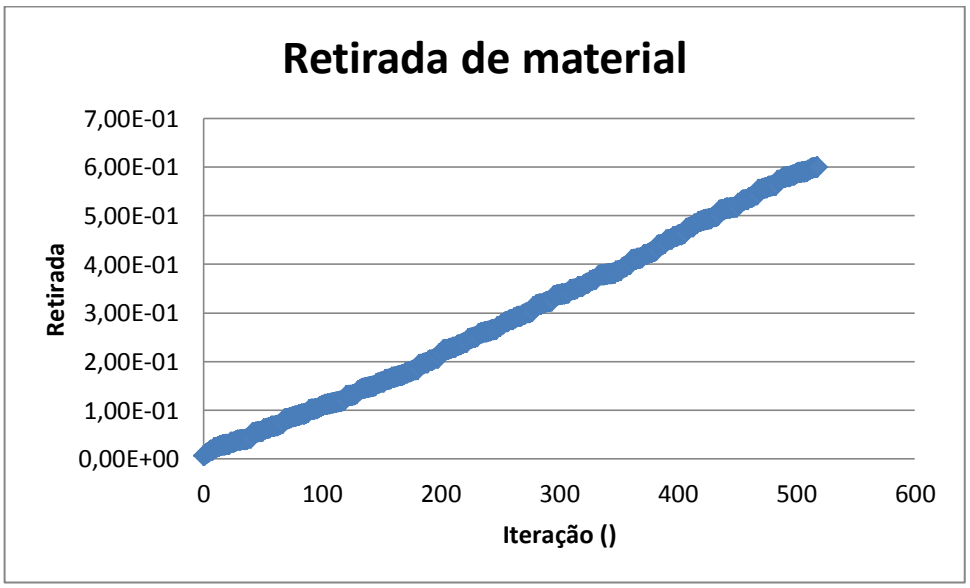
As figuras a4 e a5 abaixo mostram o processo evolutivo para o parâmetro de taxa de remoção por iteração e a quantidade percentual de volume removido em relação ao volume inicial, respectivamente, utilizando o critério de von Mises, para a geometria apresentada na figura a3.

Figura a4 - Gráfico de taxa figura a3.



Fonte: Autoria própria

Figura a5 - Gráfico de retirada figura a3.

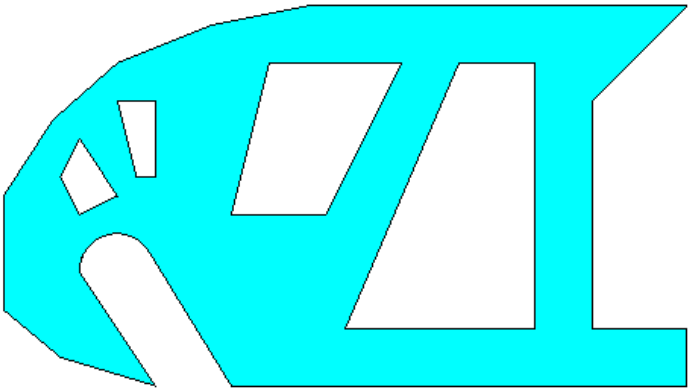


Fonte: Autoria própria

Pode ser observado pela figura a3 alguns problemas que ocorreram durante a otimização em que alguns pontos fixados foram retirados da geometria final; essa retirada pode ser explicada por apesar dos pontos terem fixação eles não são totalmente necessários para a geometria otimizada pois as tensões que agem sobre eles são baixas; contudo por motivos de uso esses pontos não podem ser retirados, logo a geometria utilizada para teste de confiabilidade foi razoavelmente diferente da

encontrada utilizando o programa de otimização. A geometria utilizada para estudo de tensões pode ser observada na figura a6 abaixo.

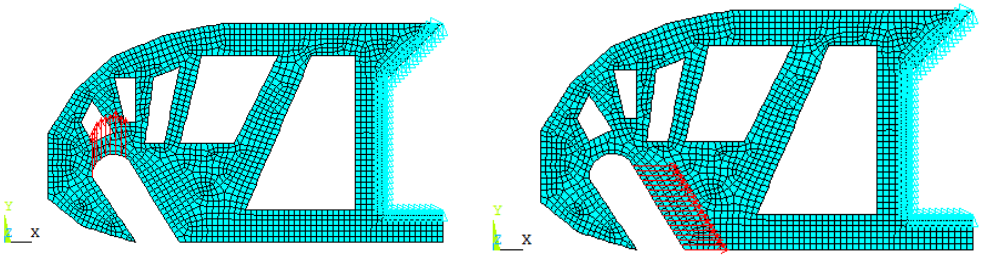
Figura a6 - Geometria utilizada para estudo de tensões



Fonte: Autoria própria

Para os testes com a geometria encontrada pelo programa de otimização topológica, a geometria foi levada ao programa *Ansys Mechanical Student*, onde a geometria da figura a6 foi criada, para as simulações a espessura da peça foi considerada unitária; além disso as propriedades utilizadas para as simulações foram as mesmas do aço AISI 4130, que possui módulo de elasticidade de 205 GPa e tensão de escoamento de 435 MPa, além de coeficiente de Poisson de 0,29. Para se obter o comportamento da geometria em diferentes situações, diversas simulações com forças em diferentes sentidos e diferentes combinações foram usadas; as forças para cima possuem módulo de 0,75 kN e as forças laterais possuem módulo de 0,5 kN. As diferentes situações em que o material foi testado podem ser observados nas figuras a7 a a10 abaixo.

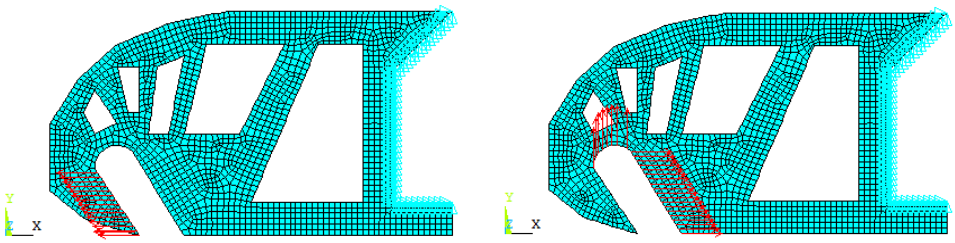
Figura a7 - a) Geometria com força apenas para cima b) Geometria com força apenas para a direita



a b

Fonte: Autoria própria

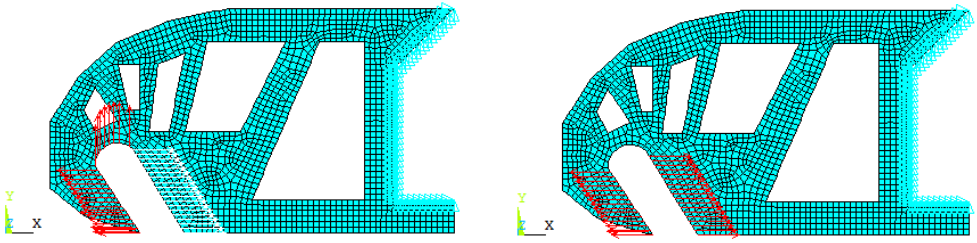
Figura a8 - a) Geometria com força apenas para a esquerda b) Geometria com forças para cima e direita



a b

Fonte: Autoria própria

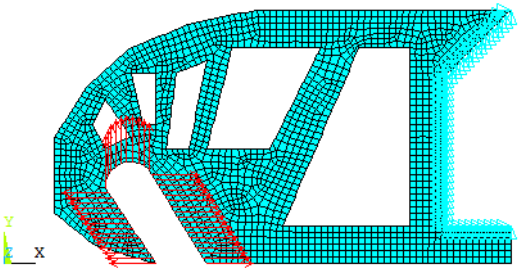
Figura a9 - a) Geometria com forças para cima e esquerda b) Geometria com forças para a direita e esquerda



a b

Fonte: Autoria própria

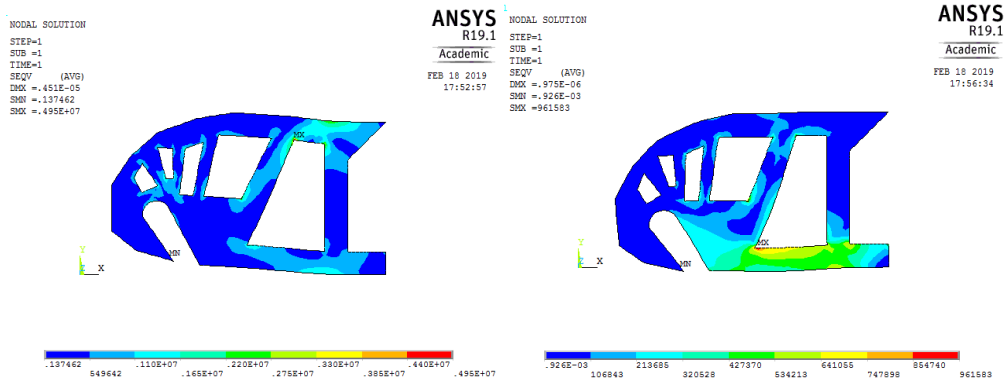
Figura a10 - Geometria com forças para cima e para os lados



Fonte: Autoria própria

Após as simulações feitas para cada caso mostrado acima os resultados obtidos são mostrados nas figuras a11 a a14 abaixo, onde as tensões de Von Mises podem ser observadas; as tensões máximas de Von Mises em cada caso poderão ser mais bem vistas na tabela a1.

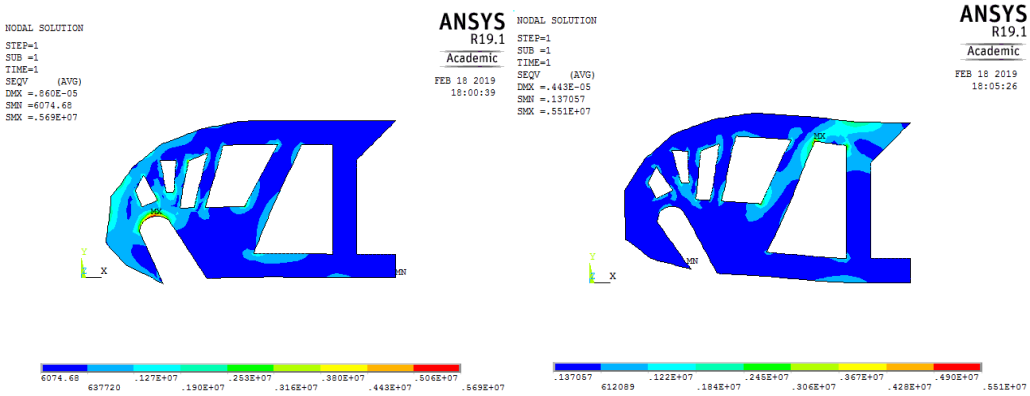
Figura a11 - a) Tensões da força para cima. b) Tensões para força para a direita.



a b

Fonte: Autoria própria

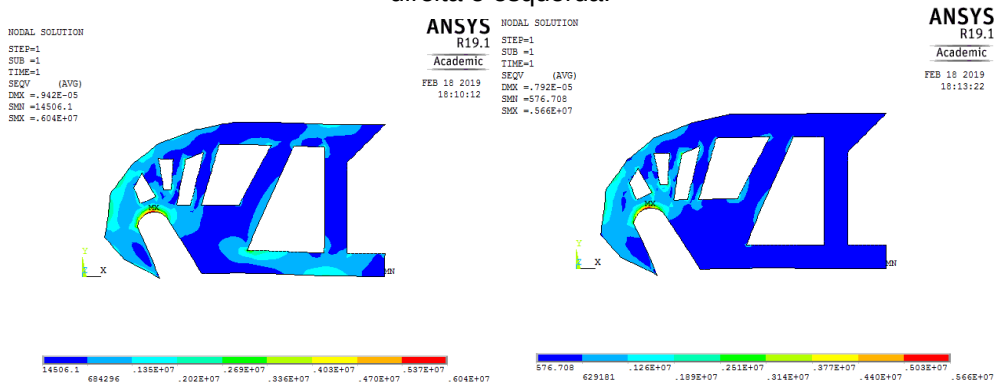
Figura a12 - a) Tensões para força para esquerda. b) Tensões para forças para cima e direita.



a b

Fonte: Autoria própria

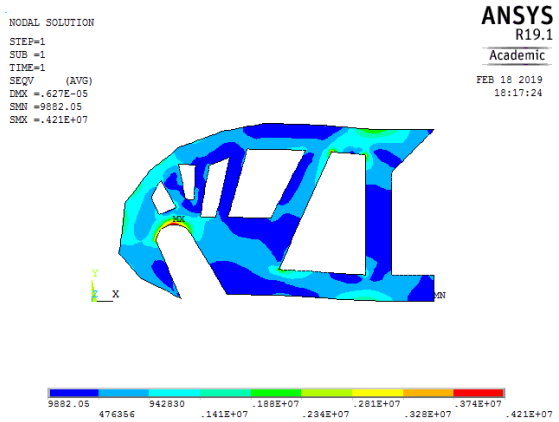
Figura a13 - a) Tensões para forças para cima e esquerda. b) Tensões para forças para direita e esquerda.



a b

Fonte: Autoria própria

Figura a14 - Tensões para forças para cima e para os lados.



Fonte: Autoria própria

Tabela a1 - Tensão máxima e mínima para cada caso

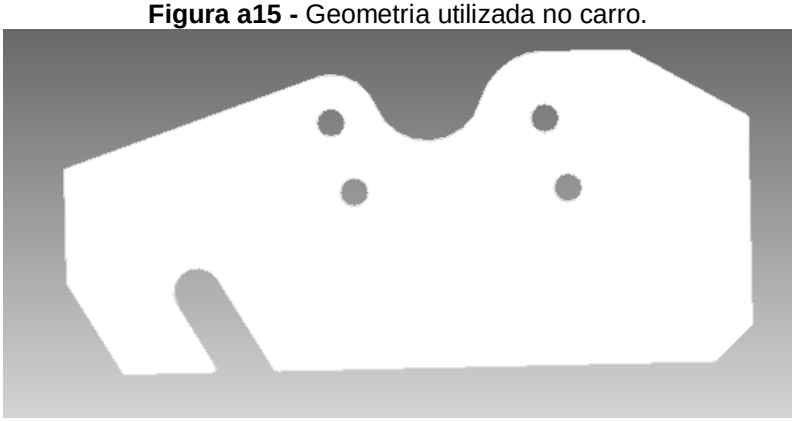
Distribuição de forças	Tensão mínima (Pa)	Tensão máxima (MPa)
Cima	0,137	4,95
Direita	0,0009	0,96
Esquerda	6074,68	5,69
Cima e direita	0,137	5,51
Cima e esquerda	14506,1	6,04
Esquerda e direita	576,71	5,66
Cima e lados	9882,05	4,21

Fonte: Autoria própria

A partir das figuras e da tabela acima é possível observar que o pior caso ocorre com forças para a cima e esquerda, contudo mesmo nessa situação a tensão máxima observada é muito pequena em comparação com a tensão de escoamento do material utilizado; dessa forma a geometria obtida pela otimização topológica pode ser aplicada para a situação requerida sem problemas.

A geometria encontrada pelo método de otimização topológica possui grandes diferenças com a geometria usada no carro da EESCuderia Mileage (Figura a15). Isso ocorre, pois a geometria analisada para a otimização não é a mesma mostrada na figura a15. Além disso, pode ser observada a ausência de furos, que são utilizados para fixação do freio na roda; essa falta dos furos no modelo otimizado pode ser explicado, pois esses furos não apresentam função estrutural sua função é apenas de fixação. A peça encontrada pela otimização deve passar por outras modificações além da furação para ser efetivamente utilizada. A geometria encontrada possui elevada quantidade de cantos vivos que atuam como concentradores de tensão fragilizando a peça, desse modo esses cantos devem ser arredondados, para que dessa forma não ocorram concentradores de tensão.

Figura a15 - Geometria utilizada no carro.



Fonte: Autoria própria