

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

MATEUS VALVERDE GASPARINO

MODELAGEM E DESENVOLVIMENTO DE UM ROBÔ EQUILIBRISTA  
(BALLBOT) COM APLICAÇÃO DE UM CONTROLE PID

São Carlos  
2016



MATEUS VALVERDE GASPARINO

MODELAGEM E DESENVOLVIMENTO DE UM ROBÔ EQUILIBRISTA  
(BALLBOT) COM APLICAÇÃO DE UM CONTROLE PID

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Mecatrônica, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Mecatrônico.

Área de Concentração: Engenharia Mecatrônica

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Becker

São Carlos

2016



AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

G249m Gasparino, Mateus Valverde  
Modelagem e desenvolvimento e um robô equilibrista  
(ballbot) com aplicação de um controle PID / Mateus  
Valverde Gasparino; orientador Marcelo Becker. São  
Carlos, 2016.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecatrônica) --  
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de  
São Paulo, 2016.

1. Ballbot. 2. Controle PID. 3. Pêndulo invertido.  
4. Robótica. 5. Impressão 3D. I. Título.



## FOLHA DE AVALIAÇÃO

**Candidato:** Mateus Valverde Gasparino

**Título:** Modelagem e desenvolvimento de um robô equilibrista (ballbot) com aplicação de um controle PID

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo  
Curso de Engenharia Mecatrônica.

### BANCA EXAMINADORA

Professor Dr. Marcelo Becker (Orientador)

Nota atribuída: 10,0 (DEZ)

Marcelo Becker  
(assinatura)

Professor Dr. Daniel Varela Magalhães

Nota atribuída: 10,0 (DEZ)

Daniel Varela Magalhães  
(assinatura)

Professor Dr. Adriano Almeida Gonçalves Siqueira

Nota atribuída: 10,0 (dez)

Adriano Almeida Gonçalves Siqueira  
(assinatura)

Média: 10,0 (DEZ)

Resultado: APROVADO

**Data:** 25/11/2016

Este trabalho tem condições de ser hospedado no Portal Digital da Biblioteca da EESC

SIM  NÃO  Visto do orientador

Marcelo Becker



## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Jorge e Ivana, pelo apoio incondicional em todos os momentos, independente de minhas escolhas, e por terem fornecido todo o suporte necessário para minha formação.

À minha namorada, Vitória, por todo o carinho e apoio que me forneceu, além de ter me ajudado com a revisão dos textos e formatação dessa monografia.

Ao meu irmão, Lucas, pelo companheirismo por todos esses anos, e também pela ajuda na edição de imagens para este trabalho.

Ao meu orientador, Marcelo Becker, por toda a ajuda e bons conselhos dados que possibilitaram a realização deste trabalho.

A todos meus amigos, que sempre me acompanharam e tornaram esses anos de graduação ainda mais especiais.

A todos vocês, o meu sincero agradecimento.



## RESUMO

GASPARINO, M. V. Modelagem e desenvolvimento de um robô equilibrista (ballbot) com aplicação de um controle PID. 2016. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

Este projeto tem como objetivo resumir e assimilar o conteúdo visto dentro do curso de Engenharia Mecatrônica relacionado à área de modelagem e controle de sistemas dinâmicos com o projeto e desenvolvimento de um protótipo de baixo custo de um robô do tipo *ballbot*, um dispositivo que se equilibra em cima de uma bola, formando um pêndulo invertido de duas dimensões. Sendo assim, visa-se a elaboração de um modelo matemático que represente a dinâmica do sistema e um controle do tipo PID tornando o sistema estável.

Um modelo 3D em CAD é desenvolvido de forma a possibilitar a extração dos parâmetros físicos do robô, como a massa e o momento de inércia do sistema, e utilizado posteriormente para a criação das peças a partir da técnica de impressão 3D.

Dessa maneira, foi projetado e construído um protótipo de modo a representar o sistema elaborado em CAD, funcionando de forma semelhante às equações encontradas do sistema dinâmico. Correções entre os modelos matemático e físico foram feitas de forma a melhor representar a realidade. Testes experimentais foram executados com o dispositivo, utilizando os ganhos de controle obtidos pelas simulações computacionais realizadas, e uma comparação é feita com os ganhos obtidos experimentalmente.

Percebe-se que o protótipo construído se comporta de maneira agressiva utilizando-se os ganhos obtidos pela simulação. Ao realizar uma calibração dos ganhos de forma experimental, nota-se que o ganho derivativo amplifica os ruídos que não foram modelados anteriormente, e ao o diminuir, o robô passa a se comportar de maneira mais estável.

Conclui-se que, embora o ganho derivativo deva ser atenuado, o controlador PID encontrado através dos cálculos funcionam no protótipo real, e portanto os modelos adotados estão corretos. Verifica-se que algumas melhoras podem ser feitas em trabalhos futuros, de forma a melhorar a performance do projeto, dentre essas melhorias: utilização de rolamentos nos rolos das rodas omnidirecionais, diminuindo folgas na movimentação das rodas; adoção de motores que iniciem seu funcionamento com pequenas tensões de entrada, de modo a diminuir a zona morta

de funcionamento; aplicação de odômetros nos motores, possibilitando um controle de posição do robô.

Palavras-chave: Ballbot, Controle PID, Pêndulo invertido, Robótica, Impressão 3D.

## ABSTRACT

GASPARINO, M. V. Modeling and development of a ball balancing robot (ballbot) with the application of a PID control. 2016. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

This project aims to summarize and assimilate the content seen in the course of Mechatronics Engineering related to the area of modeling and control of dynamic systems with the design and development of a low cost prototype of a Ballbot, a device that balances on top of a ball, creating a two-dimensional inverted pendulum. Thus, it is aimed the elaboration of a mathematical model that represents the dynamics of the system and a PID control in order to make the system stable.

A 3D CAD model is developed in order to allow the extraction of the physical parameters of the robot, such as the mass and the moment of inertia of the system, and later used to create the parts using the 3D printing technique.

As a result, a prototype was designed and constructed to represent the model elaborated in CAD, functioning in a similar way to the model of the calculated dynamic system. Corrections between the mathematical model and the physical model were made in order to better represent the reality. Tests were performed with the device, using the control gains obtained by the computational simulations of the model created, and a comparison is made with the gains obtained experimentally.

It can be noticed that the built prototype behaves aggressively using the gains obtained by the simulation. When performing a calibration of the gains experimentally, it is noticed that the derivative gain amplifies the noises that were not modeled previously, and when diminishing it, the robot starts to be behave more stable.

It is concluded that, although the derivative gain should be attenuated, the PID controller found through the calculations works well in the real prototype, and therefore, the adopted models are correct. It can be seen that some improvements can be made in future work, in order to improve the performance of the project, among these improvements: use of bearings in the rollers of the omni-directional wheels, reducing the backlash in the movement of the wheels; adoption of motors that start their operation with small input voltages, in order to reduce the dead zone of operation; application of encoders in the motors, allowing a position control of the robot.

Keywords: Ballbot, PID Control, Inverted Pendulum, Robotics, 3D Printing



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Conceito de um Ballbot .....	19
Figura 2 – Ballbot desenvolvido pela Carnegie Mellon University .....	21
Figura 3 – Ballbot desenvolvido pela Tohoku Gakuin University .....	23
Figura 4 – Rezero, ballbot desenvolvido pela ETH .....	24
Figura 5 – Imagem de uma peça fatiada para impressão .....	25
Figura 6 – Modelo do processo FDM .....	26
Figura 7 – Modelo do processo SLA .....	27
Figura 8 – Modelo do processo SLS .....	28
Figura 9 – Representação do modelo adotado para o modelo dinâmico do projeto ..	29
Figura 10 – Modelo 3D do protótipo em CAD.....	36
Figura 11 – roda omnidirecional utilizada como modelo .....	37
Figura 12 – roda omnidirecional utilizada neste projeto .....	38
Figura 13 – Malha de controle PID com ação sobre o torque nas roda virtual .....	39
Figura 14 – Impressora modelo Simple Metal da Printrbot .....	40
Figura 15 – Foto da roda impressa e montada.....	41
Figura 16 – Bola utilizada com técnica de empapelamento .....	42
Figura 17 – SBC UDOO utilizado para a programação do protótipo .....	43
Figura 18 – Unidade de medidas inerciais LSM9DS0 .....	44
Figura 19 – Diagrama do circuito eletrônico utilizado .....	45
Figura 20 – Funcionamento do filtro complementar .....	46
Figura 21 – Diagrama de blocos do sistema de um motor DC .....	47
Figura 22 – Diagrama de blocos do modelo dinâmico do motor de corrente contínua .....	48
Figura 23 – Digrama de blocos do modelo dinâmico total do sistema do ballbot .....	48
Figura 24 – Protótipo do ballbot montado .....	49
Figura 25 - Representação do sistema de rodas omnidirecionais.....	59
Figura 26 – Sistema de rodas omni-direcionais .....	60
Figura 27 – Relação de transmissão entre a bola e a roda.....	61



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	–	Tridimensional
ABS	–	Acrilonitrila butadieno estireno
ARM	–	Advanced RISC Machine
Ballbot	–	Ball Balancing Robot
CAD	–	Computer Aided Design
CMU	–	Carnegie Mellon University
DC	–	Direct Current
ETH	–	Swiss Federal Institute of Technology
FDM	–	Fused Deposition Modeling
GPU	–	Graphics Processing Unit
IMU	–	Inertial Measurement Unit
LQR	–	Regulador Linear Quadrático
PLA	–	Ácido Poliláctico
PID	–	Proporcional, Integrativo, Derivativo
SBC	–	Single Board Computer
SLA	–	Stereolithography Apparatus
SLS	–	Selective Laser Sintering
ZHAW	–	Zurich University of Applied Sciences
ZHdK	–	Zurich University of the Arts



# SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	19
1.1 Objetivos .....	20
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	21
2.1 Ballbots .....	21
2.1.1 Universidade Carnegie Mellon (CMU) .....	21
2.1.2 Universidade Tohoku Gakuin (TGU).....	22
2.1.3 Instituto Federal de Tecnologia de Zurique (ETH) .....	23
2.2 Impressão 3D.....	24
2.2.1 Modelagem por fusão e depósito (FDM): .....	25
2.2.2 Estereolitografia (SLA):.....	26
2.2.3 Sinterização seletiva a laser (SLS): .....	27
3 DESENVOLVIMENTO.....	29
3.1 Modelagem do sistema dinâmico .....	29
3.1.1 Hipóteses.....	29
3.1.2 Equações de rotação das rodas em relação à bola.....	29
3.1.3 Equação de Lagrange-Euler .....	30
3.1.4 Energia cinética da bola .....	30
3.1.5 Energia potencial da bola .....	31
3.1.6 Energia cinética da roda: .....	31
3.1.7 Energia potencial da roda:.....	31
3.1.8 Energia cinética do corpo .....	31
3.1.9 Energia potencial do corpo .....	32
3.1.10 Forças não potenciais .....	32
3.1.11 Equações diferenciais do sistema .....	32
3.1.12 Linearização da equação para ângulos pequenos .....	33
3.1.13 Transformada de Laplace para encontrar a função transferência .....	34

3.1.14	Conversão de torques .....	35
3.2	Elaboração do sistema em CAD 3D.....	35
3.3	Controle PID.....	39
3.4	Fabricação do protótipo.....	39
3.5	Circuito eletrônico.....	42
3.6	Filtro complementar.....	45
3.7	Modelagem do motor DC .....	46
3.8	Resultados obtidos.....	48
4	CONCLUSÃO.....	55

## 1 INTRODUÇÃO

*Ballbot*, abreviação de *Ball Balancing Robot*, é um robô que se equilibra sob uma esfera de modo semelhante a um pêndulo invertido, possuindo duas dimensões de equilíbrio.



Figura 1 – Conceito de um Ballbot

Fonte: (FANKHAUSER e GWERDER, 2010)

Tradicionalmente, robôs móveis diferenciais são equipados com duas rodas motoras independentes, e portanto, possuem apenas dois graus de liberdade: mover-se para frente e para trás, ou rotacionar ao redor de seu próprio eixo. Essa dinâmica diferencial adotada impede que movimentos possam ser realizados imediatamente para qualquer posição, necessitando de uma composição de movimentos.

De forma a superar essas limitações de movimento, é proposta uma dinâmica do tipo omnidirecional, composta por três rodas motoras, sendo que cada roda aplica torque apenas em sua dimensão tangencial, mas com movimentação livre em sua dimensão axial. A composição de movimento entre essas três rodas faz com que o

robô possa se movimentar em qualquer direção arbitrária no plano, sem que seja necessária a mudança de direção das rodas.

Dessa maneira, o ballbot é um tipo especial de robô omnidirecional, que utiliza da capacidade dinâmica citada para que possa realizar o equilíbrio sobre uma esfera.

## 1.1 Objetivos

Este projeto visa a elaboração de um modelo dinâmico de um robô que se equilibra em cima de uma esfera, criação de um controle PID de forma a tornar o sistema estável, e a construção de um protótipo, comparando o sistema modelado e simulado com o sistema real.

O objetivo é utilizar do cálculo inicial para construir um protótipo funcional do Ballbot, utilizando da técnica de manufatura aditiva em impressão 3D para os elementos mecânicos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Ballbots

Diversos ballbots foram desenvolvidos ao longo dos últimos 10 anos, sendo o primeiro deles criado na Universidade Carnegie Mellon. Eles foram se desenvolvendo com o passar dos anos, modificando alguns conceitos e aperfeiçoando suas técnicas.

Serão citados três projetos de relevância, desenvolvidos em diferentes universidades, demonstrando suas principais características.

#### 2.1.1 Universidade Carnegie Mellon (CMU)

Em 2005, foi desenvolvido e publicado pela Universidade Carnegie Mellon o primeiro ballbot nos Estados Unidos, mostrado na Figura 2. O robô tem o tamanho aproximado de uma pessoa, construído propositalmente neste tamanho visando a interação com humanos. (LAUWERS, KANTOR e HOLLIS, 2005)

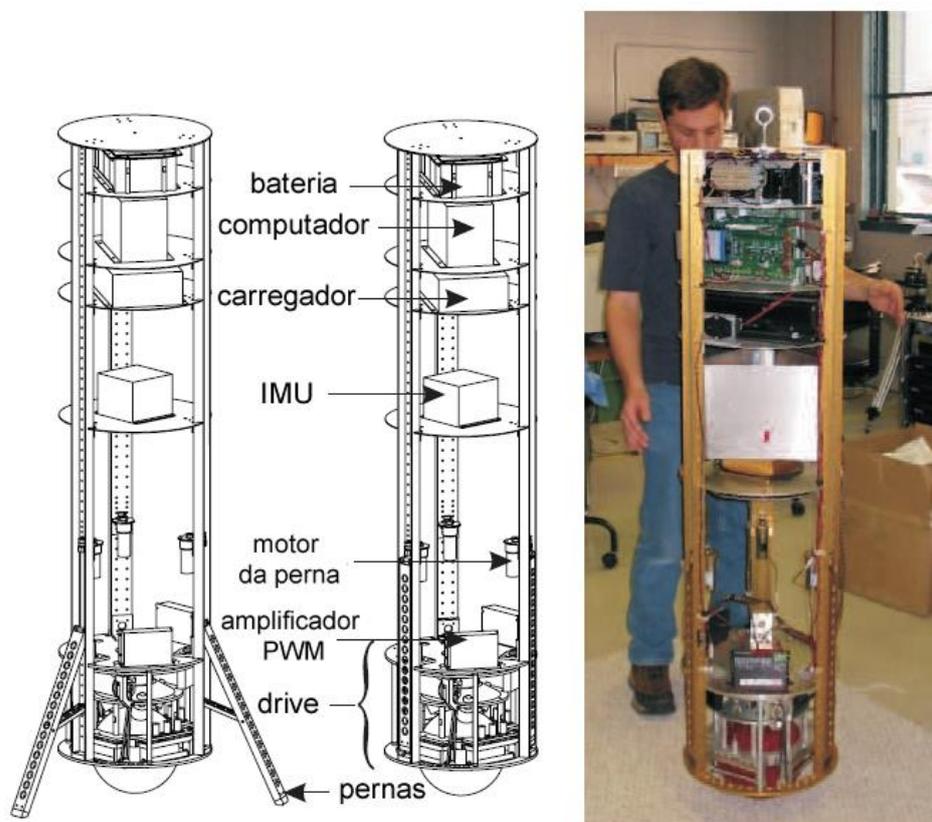


Figura 2 – Ballbot desenvolvido pela Carnegie Mellon University

Fonte: (NAGARAJAN, KANTOR e HOLLIS, 2006)

Sua dinâmica é baseada em quatro rolos que estão em contato com uma bola, sendo dois desses rolos dirigidos por motores acoplados por meio de correias, e dois deles livres, com molas que os forçam contra a bola.

Devido ao sistema utilizado para sua locomoção, o projeto possui a limitação de não poder rotacionar ao redor de seu próprio eixo.

Além disso, o robô da CMU conta com um dispositivo de três pernas que se abrem e evitam que o ballbot entre em queda.

Com o desenvolver do projeto, foi decidido a substituição dos dois rolos passivos por rolos ativos, e portanto mais dois motores foram adicionados, tornando o projeto ainda mais caro.

A primeira versão do ballbot da CMU utiliza um controle do tipo LQR para a estabilização do ângulo de balanço. (NAGARAJAN, KANTOR e HOLLIS, 2006)

Uma segunda versão foi publicada utilizando um controle do tipo PID, demonstrando uma melhor estabilidade do sistema. (NAGARAJAN, KANTOR e HOLLIS, 2013)

### 2.1.2 Universidade Tohoku Gakuin (TGU)

Em 2008, a Universidade Tohoku Gakuin, no Japão, desenvolveu um outro ballbot, chamada BallP, bem menor quando comparado ao construído pela CMU, possuindo apenas 0,5 m de altura, mas com a inovação de que, além de poder realizar a mesma movimentação do ballbot anterior, poder ainda rotacionar ao redor de seu próprio eixo, utilizando o sistema de três rodas omnidirecionais, demonstrado na Figura 3.

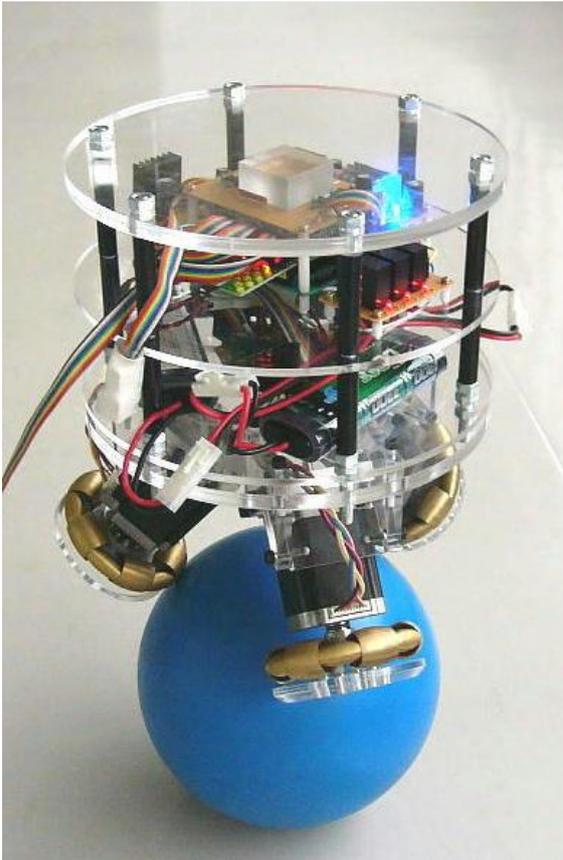


Figura 3 – Ballbot desenvolvido pela Tohoku Gakuin University

Fonte: (KUMAGAI e OCHIAI, 2009)

A estrutura do robô é praticamente toda construída em acrílico, e pode carregar cargas de até 10 kg. Seu sistema motor conta com três motores do tipo motor de passo bipolar, com torque nominal de 2 Nm, e a bola no qual está apoiado é uma bola de boliche, revestida com spray de borracha, pesando 3,8 kg. O sistema total construído possui uma massa total de 8,7 kg.

### 2.1.3 Instituto Federal de Tecnologia de Zurique (ETH)

Criado em 2010 pelo Instituto Federal de Tecnologia de Zurique, Rezero foi o robô equilibrista desenvolvido a partir de um projeto de conclusão de curso, no qual uma equipe de oito estudantes de engenharia mecânica do Instituto Federal de Tecnologia de Zurique (ETH), dois engenheiros elétricos da Universidade de Ciências Aplicadas de Zurique (ZHAW) e três designers industriais da Universidade de Artes de Zurique (ZHdK) participaram do projeto de modelagem e construção do protótipo.



Figura 4 – Rezero, ballbot desenvolvido pela ETH  
Fonte: (FANKHAUSER e GWERDER, 2010)

Assim como o robô criado pela TGU, Rezero possui três rodas omnidirecionais. Além disso, possui alta robustez dinâmica, alcançando uma velocidade de movimento linear de 2 m/s e um ângulo de inclinação de 20°. O corpo do robô tem uma massa de 9,2 kg (FANKHAUSER e GWERDER, 2010)

## 2.2 Impressão 3D

Atualmente as impressoras 3D possibilitam a fabricação de peças com geometrias complexas, sendo uma de suas principais vantagens a confecção de protótipos com rapidez e baixo custo envolvido no processo.

A seguir serão discorridas as três principais técnicas de impressão 3D, sendo que basicamente todas as técnicas se baseiam no princípio de fatiar a superfície da peça em planos horizontais, obtendo superfícies que serão impressas uma após a

outra, processo similar ao de uma imagem obtida pelo processo de ressonância magnética, como pode ser observado na Figura 5.

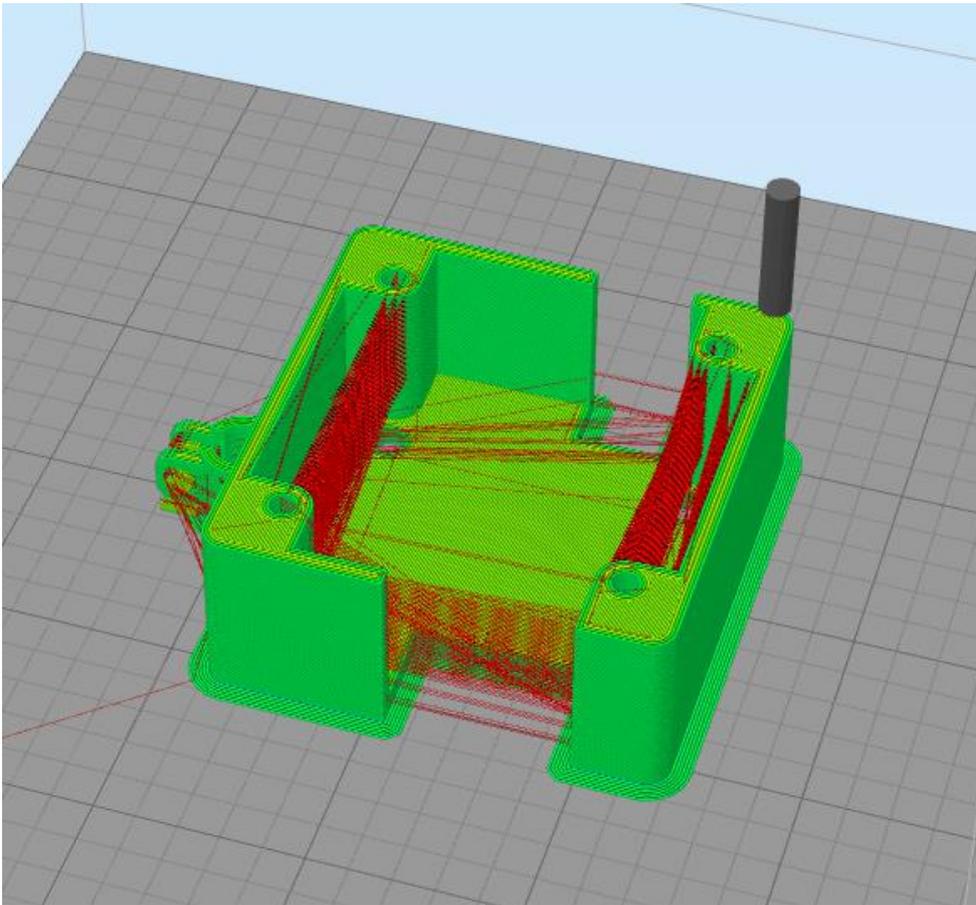


Figura 5 – Imagem de uma peça fatiada para impressão

Fonte: próprio autor

### 2.2.1 Modelagem por fusão e depósito (FDM):

Acrônimo do inglês para *Fused Deposition Modeling*, segundo a empresa Stratasys, é um método desenvolvido e patenteado há mais de 20 anos por Scott Crump, fundador da empresa (Stratasys).

O método baseia-se na deposição, camada por camada, de material fundido sobre uma placa até que a peça seja impressa por completo. Esta técnica é atualmente a mais popular e a mais barata dentre as citadas, devido ao preço do plástico utilizado.

O material utilizado neste tipo de impressora é um filamento termoplástico, que pode ser feito de ABS, PLA, Nylon entre outros materiais, sendo o mesmo aquecido até sua temperatura de fusão por um bico extrusor, fazendo com que ocorra a

deposição do material sobre uma placa, geralmente aquecida para evitar choques térmicos e melhorar assim a qualidade de fixação do material na mesa. Este será o método utilizado para desenvolver o protótipo do presente trabalho. Pela Figura 6 podemos ver uma ilustração deste processo. (HOPKINSON, HAGUE e DICKENS, 2005)

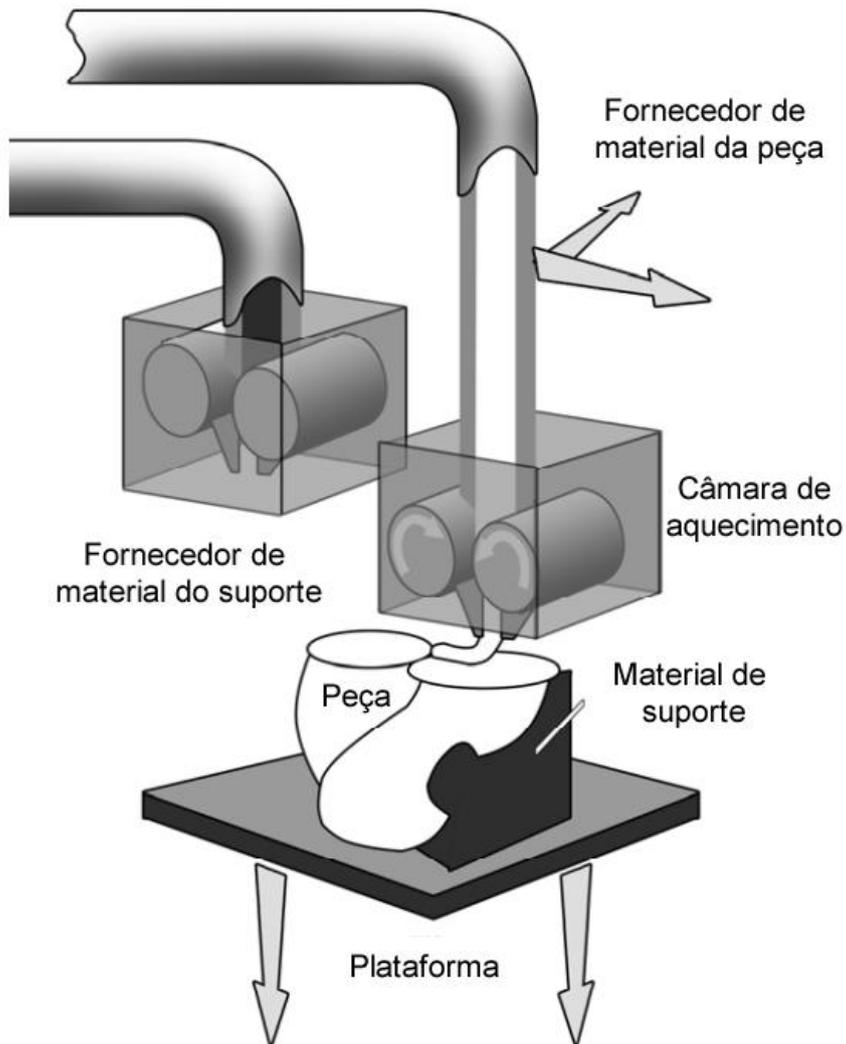


Figura 6 – Modelo do processo FDM

Fonte: (HOPKINSON, HAGUE e DICKENS, 2005)

### 2.2.2 Estereolitografia (SLA):

Do inglês *Stereo lithography apparatus*, foi o primeiro processo de impressão 3D desenvolvido, e que consiste numa plataforma inserida em uma cuba contendo um

polímero em estado líquido, fotossensível, que sofre um processo de cura logo após ser bombardeado por um feixe de laser ultravioleta.

Os pontos em que o laser incide são os pontos sensibilizados e que são solidificados. Quando uma camada é finalizada, a plataforma se desloca para baixo e uma nova camada começa a ser impressa. Esta técnica oferece excelente precisão, porém com custo mais elevado em relação a técnica FDM. Através da Figura 7 é possível ver uma ilustração desta técnica. (HOPKINSON, HAGUE e DICKENS, 2005)

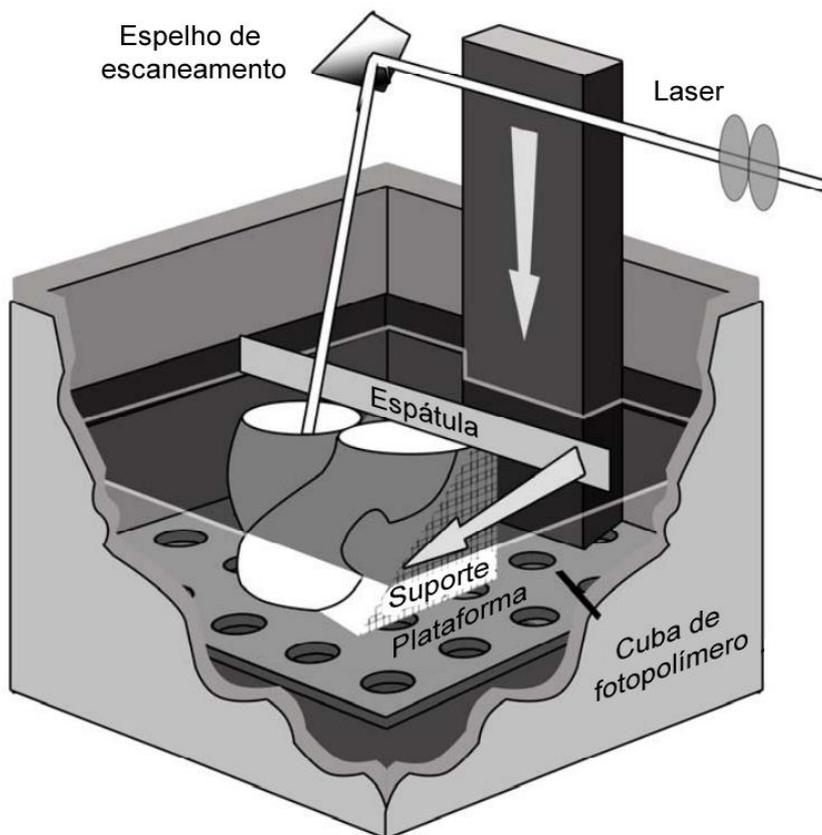


Figura 7 – Modelo do processo SLA

Fonte: (HOPKINSON, HAGUE e DICKENS, 2005)

### 2.2.3 Sinterização seletiva a laser (SLS):

Acrônimo do inglês para *Selective laser sintering*, é uma técnica bastante consolidada que consiste na deposição de uma camada a ser impressa na forma de pó, este pó é então sinterizado seletivamente pela ação de um feixe de laser. Um rolo deposita a próxima camada de pó que novamente é sinterizada pelo laser nos pontos determinados, o que ocorre de maneira sucessiva até a impressão final da peça.

A grande vantagem deste método é a possibilidade de utilizar diversos materiais em pó, além dos plásticos utilizados nas outras técnicas citadas, como: cera, vidro, cerâmica, aço inoxidável, titânio, alumínio, entre outros.

A grande desvantagem do método é seu alto custo e a necessidade de equipamento fechado com controle de atmosfera e temperatura elevada. Na Figura 8 é possível observar um modelo do método citado. (HOPKINSON, HAGUE e DICKENS, 2005)

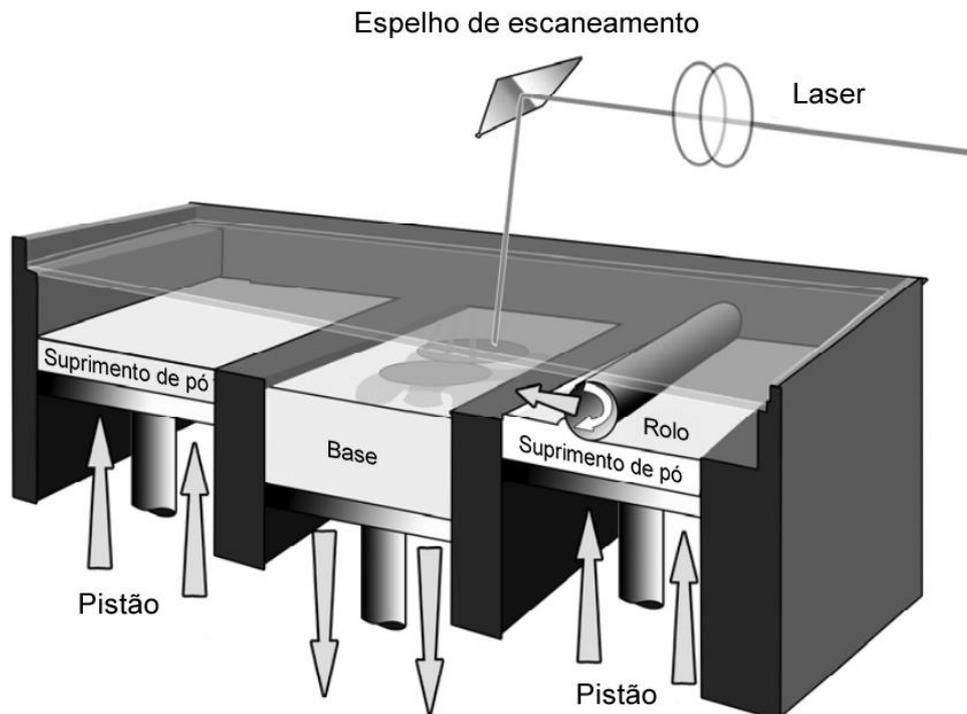


Figura 8 – Modelo do processo SLS

Fonte: (HOPKINSON, HAGUE e DICKENS, 2005)

### 3 DESENVOLVIMENTO

#### 3.1 Modelagem do sistema dinâmico

##### 3.1.1 Hipóteses

Para o desenvolvimento do modelo do sistema dinâmico do sistema abordado nesse projeto, algumas hipóteses simplificadoras foram adotadas de forma a possibilitar a construção do modelo:

- Eixos independentes (despreza-se os termos de acoplamento);
- Ângulo de tombamento pequeno (menor que  $15^\circ$ );
- Não há deslizamento entre as rodas e a bola.

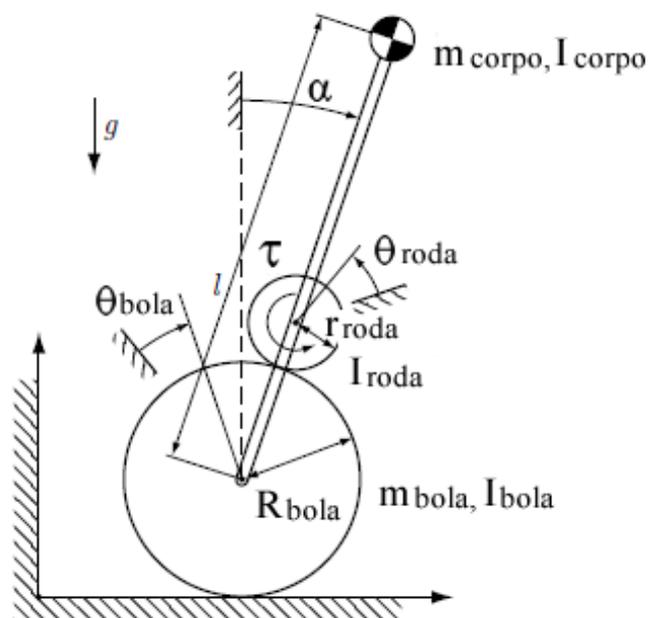


Figura 9 – Representação do modelo adotado para o modelo dinâmico do projeto

Fonte: (FANKHAUSER e GWERDER, 2010)

##### 3.1.2 Equações de rotação das rodas em relação à bola

Assumindo que não há deslizamento entre as rodas e a bola, como indicado na terceira hipótese, foram deduzidas as seguintes equações, estabelecendo uma relação entre a rotação da roda, da bola, e o ângulo de inclinação do corpo do robô (FANKHAUSER e GWERDER, 2010):

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{roda,x} &= \frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot (\dot{\theta}_{bola,x} - \dot{\alpha}) - \dot{\alpha} \\ \dot{\theta}_{roda,y} &= \frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot (\dot{\theta}_{bola,y} - \dot{\alpha}) - \dot{\alpha} \\ \dot{\theta}_{roda} &= \frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot \sin \beta (\dot{\theta}_{bola,z} - \dot{\alpha})\end{aligned}$$

### 3.1.3 Equação de Lagrange-Euler

Para a dedução do modelo do sistema, decidiu-se pela utilização do método utilizando as equações de Lagrange-Euler, demonstradas abaixo:

$$\frac{dL}{dq_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{q}_i} \right) = -Q_i^{ext} \quad (1)$$

$$L = T - V \quad (2)$$

Sendo  $T$  a energia cinética e  $V$  a energia potencial.

Para que se possa utilizar as equações de Lagrange-Euler, é preciso calcular as energias cinética e potencial de cada elemento do sistema.

Neste momento, algumas hipóteses foram tomadas, simplificando o cálculo das energias sem prejudicar consideravelmente no resultado do modelo.

Para isso, será considerado o corpo do robô como um todo, integrando a massa das rodas com a massa do corpo como sendo uma só, tendo como resultado que a bola em que o mesmo está apoiado e as rodas possuam apenas energia cinética rotacional, ou seja, a energia cinética translacional e potencial das rodas serão integrados à energia cinética e potencial do corpo.

### 3.1.4 Energia cinética da bola

Para o cálculo da energia cinética da bola, deve-se levar em consideração a parte translacional e a parte rotacional. Sendo assim, seu cálculo pode ser expresso da seguinte forma:

$$T_{bola} = \frac{1}{2} \cdot m_{bola} \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{bola} \cdot \dot{\theta}_{bola}^2 \quad (3)$$

Expressando a velocidade linear do sistema em termos de velocidade angular da bola  $\dot{x} = r_{bola} \cdot \dot{\theta}_{bola}$ . Logo, substituindo na equação (1):

$$T_{bola} = \frac{1}{2} \cdot m_{bola} \cdot (r_{bola} \cdot \dot{\theta}_{bola})^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{bola} \cdot \dot{\theta}_{bola}^2 \quad (4)$$

### 3.1.5 Energia potencial da bola

Ao considerar o centro da bola como referência para o cálculo das energias potenciais, a energia potencial da bola torna-se zero.

### 3.1.6 Energia cinética da roda:

Será levado em consideração apenas a energia cinética rotacional da roda, já que a energia translacional será incorporado na energia cinética translacional do corpo.

$$T_{roda} = \frac{1}{2} \cdot I_{roda} \cdot \dot{\theta}_{roda}^2 = \frac{1}{2} \cdot I_{roda} \cdot \left[ \frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot (\dot{\theta}_{bola} - \dot{\alpha}) - \dot{\alpha} \right]^2 \quad (5)$$

### 3.1.7 Energia potencial da roda:

A energia cinética da roda será considerada como zero, já que será considerada como parte da energia potencial do corpo como um todo.

### 3.1.8 Energia cinética do corpo

Da mesma forma que a energia cinética da bola, a energia cinética do corpo deve levar em consideração a parte da energia vinda da rotação e da translação do robô. Sendo assim:

$$T_{corpo} = \frac{1}{2} \cdot m_{corpo} \cdot (\dot{x} + l \cdot \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{corpo} \cdot \dot{\alpha}^2 \quad (6)$$

Calculando a velocidade linear do corpo em termos de velocidade angular da bola, como feito anteriormente para o cálculo da energia da bola, e realizando a distributiva do termo quadrático, obtém-se:

$$T_{corpo} = \frac{1}{2} \cdot m_{corpo} \cdot (r_{bola}^2 \cdot \dot{\theta}_{bola}^2 + 2 \cdot l \cdot \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot r_{bola} \cdot \dot{\theta}_{bola} + l^2 \cdot \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{corpo} \cdot \dot{\alpha}^2 \quad (7)$$

### 3.1.9 Energia potencial do corpo

Assim como realizado anteriormente para o cálculo da energia potencial para a bola, a energia potencial do corpo é calculada com referência o centro da bola, e portanto, obtém-se o seguinte resultado:

$$V_{corpo} = m_{corpo} \cdot g \cdot l \cdot \cos \alpha \quad (8)$$

### 3.1.10 Forças não potenciais

Representam as forças externas atuantes do robô, no caso, o torque do motor atuante na roda virtual do modelo descrito, responsável por manter o equilíbrio do ballbot.

$$Q_i^{ext} = \frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot \tau_{motor} \quad (9)$$

### 3.1.11 Equações diferenciais do sistema

Para a obtenção das equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema, é utilizada o equacionamento de Euler-Lagrange, demonstrado nas equações (1) e (2).

Sendo assim, como resultado, pode-se observar o sistema de equações diferenciais formado pelas equações (11) e (12), sendo uma obtida a partir da derivação em relação ao ângulo  $\theta_{bola}$ , e outra obtida com a derivação em relação ao ângulo  $\alpha$ .

$$\frac{dL}{d\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\alpha}} \right) = -Q_i^{ext} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & -m_{corpo} \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot (r_{bola} \cdot \dot{\theta}_{bola}) + m_{corpo} \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha - [m_{corpo} \cdot \\ & (-l \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot (r_{bola} \cdot \dot{\theta}_{bola}) + l \cdot \cos \alpha \cdot (r_{bola} \cdot \ddot{\theta}_{bola}) + l^2 \cdot \ddot{\alpha}) + I_{corpo} \cdot \\ & \ddot{\alpha}] = -\frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot \tau_{roda} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & m_{bola} \cdot r_{bola}^2 \cdot \ddot{\theta}_{bola} + I_{bola} \cdot \ddot{\theta}_{bola} + m_{corpo} \cdot (r_{bola}^2 \cdot \ddot{\theta}_{bola} - l \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \\ & r_{bola} + l \cdot \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} \cdot r_{bola}) = -\frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot \tau_{motor} \end{aligned} \quad (12)$$

### 3.1.12 Linearização da equação para ângulos pequenos

Utilizando a hipótese de que o robô sofrerá apenas pequenas variações de inclinação, pode-se linearizar as funções trigonométricas em torno do ponto  $\alpha = 0$  sem que se tenha grandes erros nos resultados, de modo a obter as seguintes simplificações utilizadas no equacionamento do modelo:

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

$$\cos \alpha \approx 1$$

Substituindo tais funções trigonométricas, têm-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} & m_{corpo} \cdot g \cdot l \cdot \alpha - m_{corpo} \cdot l \cdot r_{bola} \cdot \ddot{\theta}_{bola} - m_{corpo} \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha} - I_{corpo} \cdot \ddot{\alpha} = \\ & -\frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot \tau_{roda} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & m_{bola} \cdot r_{bola}^2 \cdot \ddot{\theta}_{bola} + I_{bola} \cdot \ddot{\theta}_{bola} + m_{corpo} \cdot (r_{bola}^2 \cdot \ddot{\theta}_{bola} - l \cdot \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \\ & r_{bola} + l \cdot \ddot{\alpha} \cdot r_{bola}) = -\frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot \tau_{motor} \end{aligned} \quad (14)$$

### 3.1.13 Transformada de Laplace para encontrar a função transferência

Utilizando a transformada de Laplace nas equações (9) e (10) e rearranjando os termos de interesse como demonstrado no Apêndice A – Modelagem do robô Ballbot, é possível encontrar as seguintes funções transferência do sistema:

$$\mathcal{L}(f(t)) \Rightarrow F(s)$$

$$\mathcal{L}(\alpha) = A$$

$$\mathcal{L}(\theta_{bola}) = \Theta_{bola}$$

$$\mathcal{L}(\tau_{roda}) = T_{roda}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x} \cdot \sin x\} = 0$$

$$\frac{A}{T_{roda}} = -\frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot \frac{J_3 + J_1}{(J_3^2 - J_1 \cdot J_2) \cdot s^2 + J_1 \cdot P} \quad (15)$$

$$\frac{\Theta_{bola}}{T_{roda}} = -\frac{r_{bola}}{r_{roda}} \cdot \frac{J_3 \cdot s^2 - P}{(J_1 \cdot J_2 + J_3^2) \cdot s^4 - J_1 \cdot P \cdot s^2} \quad (16)$$

Em que os termos das equações (17), (18), (19) e (20) foram utilizados de modo a simplificar a apresentação das equações (15) e (16):

$$P = m_{corpo} \cdot g \cdot l \quad (17)$$

$$J_1 = m_{bola} \cdot r_{bola}^2 + m_{corpo} \cdot r_{bola}^2 + I_{bola} + I_{roda} \cdot \frac{r_{bola}^2}{r_{roda}^2} \quad (18)$$

$$J_2 = I_{roda} \cdot \left( \frac{r_{bola}^2}{r_{roda}^2} - 1 \right) + m_{corpo} \cdot l^2 + I_{corpo} \quad (19)$$

$$J_3 = m_{corpo} \cdot l \cdot r_{bola} - I_{roda} \cdot \left( \frac{r_{bola}^2}{r_{roda}^2} + \frac{r_{bola}}{r_{roda}} \right) \quad (20)$$

### 3.1.14 Conversão de torques

Devido ao sistema de locomoção escolhido ser um sistema de três rodas omnidirecionais, é necessário que haja uma conversão de torques entre o modelo, que considera apenas uma roda para cada eixo, para o sistema físico com três rodas em posição triangular.

Sendo assim, as equações (20), (21) e (22) demonstram a relação entre os torques na direção de eixo x e y do modelo bidimensional com o sistema de três motores. O acompanhamento da derivação dessas equações pode ser feito no Apêndice A – Conversão de torque entre a roda virtual e as rodas reais.

$$T_{roda,1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{T_y}{\cos \beta} \quad (21)$$

$$T_{roda,2} = -\frac{1}{\cos \beta} \cdot (T_y + \sqrt{3} \cdot T_x) \quad (22)$$

$$T_{roda,3} = \frac{1}{\cos \beta} \cdot (-T_y + \sqrt{3} \cdot T_x) \quad (23)$$

O ângulo entre a base do ballbot e o eixo dos motores é de  $\beta = 40^\circ$ .

### 3.2 Elaboração do sistema em CAD 3D

Com o modelo do sistema calculado, é preciso encontrar os parâmetros físicos do sistema, para que assim seja possível simular o modelo e comprovar sua validade.

Sendo assim, é feito o modelo em CAD 3D, utilizando como base o software Solid Edge, como demonstrado na Figura 10.

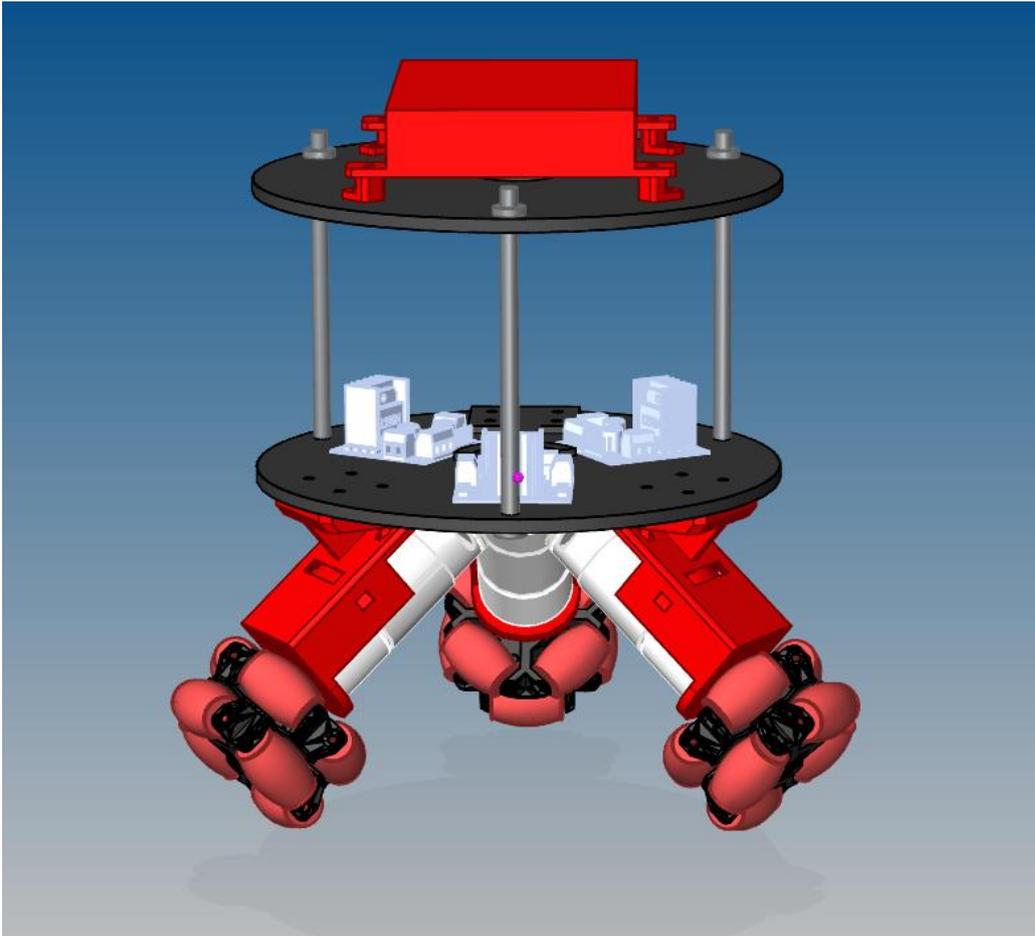


Figura 10 – Modelo 3D do protótipo em CAD

Fonte: próprio autor (2016)

A roda omnidirecional proposta foi adaptada de um projeto do usuário “falflores” do site thingiverse.com, demonstrada na Figura 11, modificada de forma a atender melhor as exigências desse projeto, como poder ser visto na Figura 12.



Figura 11 – roda omnidirecional utilizada como modelo

Fonte: (FALFLORES, 2015)

Essas modificações se tratam em diminuir a distância entre as duas fileiras de rolos e aumentar o diâmetro dos rolos, evitando o contato entre a base e a bola utilizada no ballbot. Além disso, foi feito um rebaixo em cada um dos rolos, de modo a alocar um revestimento de borracha para que aumente o atrito entre as rodas e a bola.

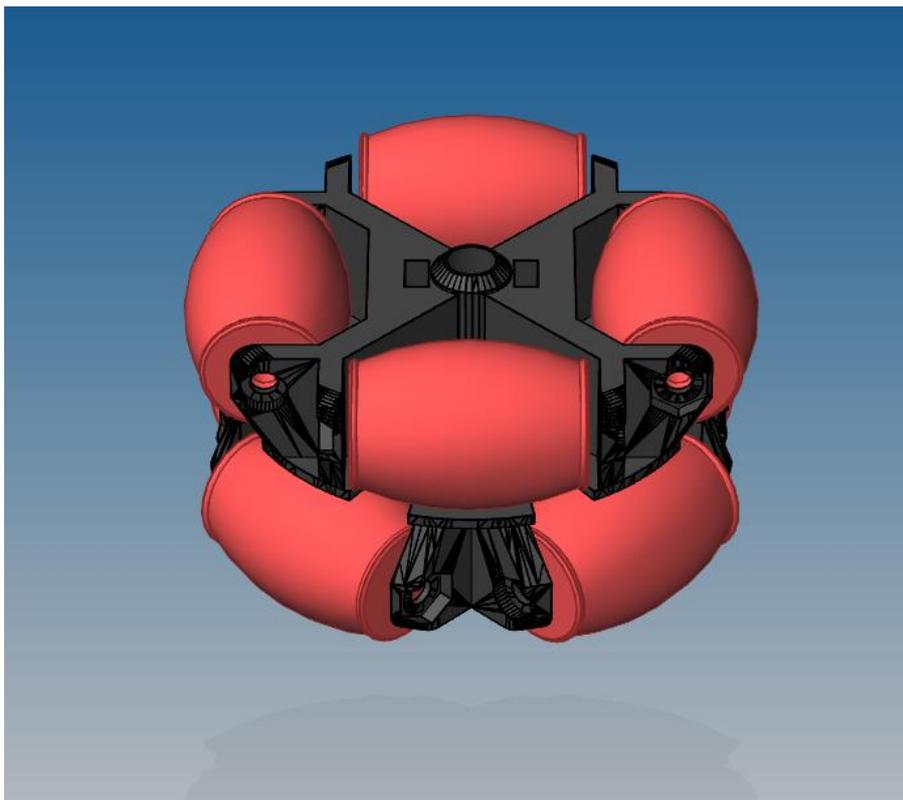


Figura 12 – roda omnidirecional utilizada neste projeto

Fonte: próprio autor

O modelo do robô proposto é um sistema com dois andares, o primeiro no qual são alocados sob sua superfície os motores responsáveis pelo deslocamento do ballbot, e sobre sua superfície os drivers responsáveis por controlar a tensão de entrada de cada um desses motores.

O segundo andar é utilizado apenas a superfície superior, que aloca o computador embarcado responsável por todo o processamento do sistema, assim como o sensor de medidas inerciais IMU, responsável pela coleta de dados para o cálculo dos ângulos de direcionamento do corpo do robô, como pode ser visto na Figura 10.

A partir do projeto em CAD, foi possível extrair características importantes para o modelo dinâmico. Esses parâmetros foram listados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do Modelo Mecânico

Parâmetro	Valor
Massa do robô	2,5 kg
Distância entre o centro da bola e o centro de massa do robô	0,23 m
Raio das rodas	36 mm
Momento de inércia do robô	0,02 kg.m <sup>2</sup>

Fonte: próprio autor

### 3.3 Controle PID

De forma a transformar o sistema proposto, naturalmente instável, em um sistema estável, é criado um controle do tipo PID paralelo para que controle o torque do motor do robô a partir de leituras do ângulo de tombamento do corpo do sistema.

Um modelo da malha de controle proposta pode ser observada na Figura 13.

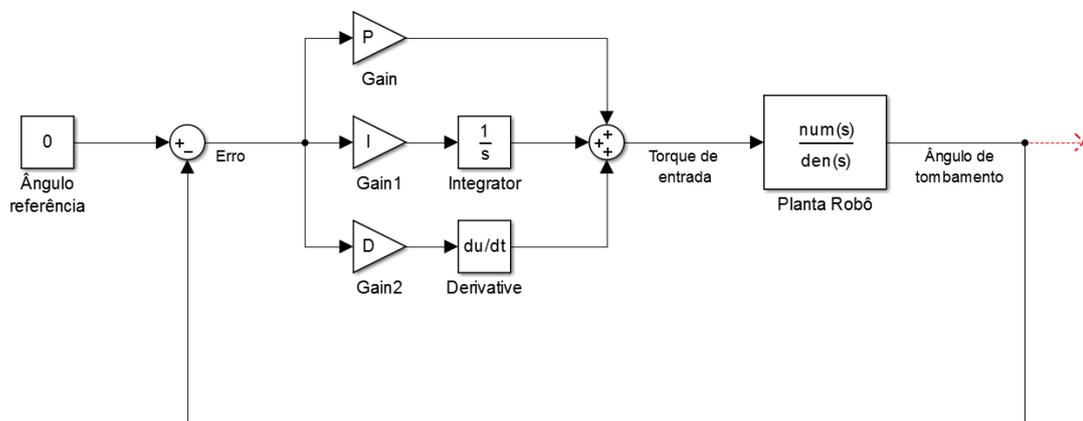


Figura 13 – Malha de controle PID com ação sobre o torque nas roda virtual

Fonte – próprio autor

### 3.4 Fabricação do protótipo

O protótipo é feito a partir do modelo produzido em CAD, utilizando como principal método de fabricação a impressão 3D.

A máquina utilizada no processo de impressão é uma impressora do modelo “Simple Metal”, da empresa Printrbot. A mesma possui a adaptação de uma mesa quente, realizada pelo próprio autor, possibilitando a produção de peças tanto em plástico PLA quanto em ABS.



Figura 14 – Impressora modelo Simple Metal da Printrbot

Fonte: Printrbot (2016)

As peças produzidas para o protótipo desse projeto foram feitas em plástico PLA, escolhido devido a maior facilidade de obter peças sem empenamentos quando resfriadas, além de serem menos flexíveis do que as peças em ABS. Os parâmetros de impressão utilizados para essas peças estão descritas na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados para a impressão das peças do protótipo

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
Diâmetro do bico de extrusão	0,4 mm
Altura de camada	0,2 mm
Porcentagem de preenchimento	20%
Temperatura do bico de extrusão	190°C
Temperatura da mesa	60°C
Velocidade de impressão	0,06 m/s

Fonte: próprio autor



Figura 15 – Foto da roda impressa e montada

Fonte: próprio autor

A bola em que o robô vai se equilibrar é uma bola de isopor, com diâmetro de 300 mm, sendo que sua superfície foi protegida utilizando uma técnica de empapelamento, demonstrado na Figura 16, de forma a tornar mais dura e resistente à perfurações.



Figura 16 – Bola utilizada com técnica de empapelamento

Fonte: próprio autor

Ao final do processo, a massa da bola é de 150 g, com um momento de inércia de aproximadamente 0,0023 kg/m<sup>2</sup>, calculado a partir da equação (24) para o cálculo do momento de inércia de uma esfera oca.

$$I_{bola} = \frac{2}{3} \cdot m_{bola} \cdot r_{bola}^2 \quad (24)$$

### 3.5 Circuito eletrônico

Para o circuito eletrônico do protótipo, foi escolhido como base de processamento o computador UDOO Quad, por ter grande poder de processamento em um computador pequeno para ser colocado no robô, o que facilita em sua alocação e também em possíveis melhorias futuras no projeto. Além disso, o módulo conta com um Arduino Due, com clock de 84 MHz, conectado internamente ao computador pela porta serial, o que facilita o uso das portas de entrada e saída. O circuito UDOO Quad

oferece os seguintes requisitos, segundo o site oficial do projeto UDOO (udoo.org, 2016):

- **Processador:** NXP® i.MX6Quad, 2\4 x ARM® Cortex™-A9 core @ 1GHz
- **GPU:** Vivante GC 2000 para 3D + Vivante GC 355 para 2D + Vivante GC 320 para 2D
- **Microcontrolador:** Atmel SAM3X8E ARM Cortex-M3 CPU
- **Memória RAM:** DDR3 1GB
- 76 pinos de entrada/saída compatíveis com o padrão Arduino
- 3 portas USB 2.0
- Tensão de alimentação de 6 a 15 V
- Ethernet RJ45 (10/100/1000 MBit)
- Módulo WiFi
- Conector SATA com conector de energia



Figura 17 – SBC UDOO utilizado para a programação do protótipo

Fonte: www.udoo.org (2016)

A leitura dos ângulos de direcionamento do protótipo é realizado através de uma unidade de medidas inerciais LSM9DS0, da Sparkfun.

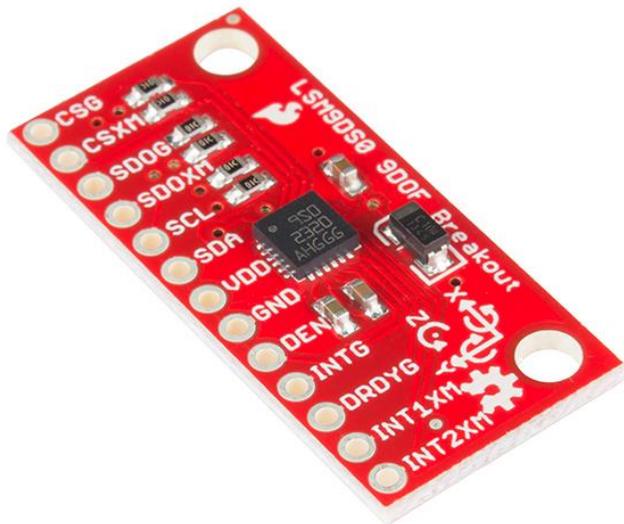


Figura 18 – Unidade de medidas inerciais LSM9DS0

Fonte: sparkfun.com (2016)

O módulo possui um acelerômetro de três graus de liberdade, um giroscópio também de três graus de liberdade, uma bússola e um sensor de temperatura embutidos. Suas especificações segundo o site Sparkfun são (sparkfun.com, 2016):

- Escala de aceleração linear de  $\pm 2/\pm 4/\pm 6/\pm 8/\pm 16$  g
- Escala magnética de  $\pm 2/\pm 4/\pm 8/\pm 12$  gauss
- Escala de variação angular de  $\pm 245/\pm 500/\pm 2000$  °/s
- 16-bit data output
- Interface SPI / I<sup>2</sup>C
- Tensão de alimentação de 2.4 V a 3.6 V
- Geradores de interrupção programável

Como *driver* para controlar os motores de corrente contínua, foi escolhido um módulo contendo duas meia pontes-h do circuito integrado BTS7960, com capacidade de corrente contínua de 40 A, e tensão de operação de até 27,5 V. (Digi-Key Electronics)

Utilizando os módulos citados, o circuito eletrônico foi construído, representado pelo diagrama de blocos da Figura 19.

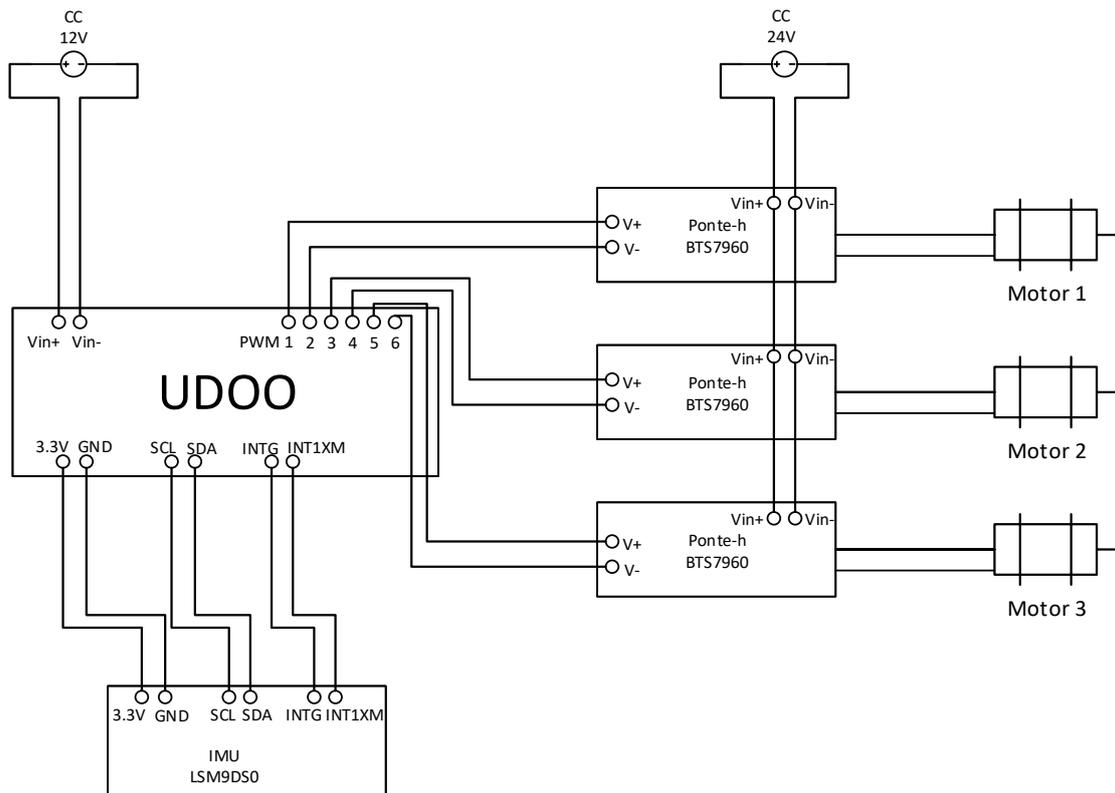


Figura 19 – Diagrama do circuito eletrônico utilizado

Fonte: próprio autor (2016)

### 3.6 Filtro complementar

A leitura dos ângulos de inclinação do protótipo é realizado a partir de uma unidade de medidas inerciais, através dos sensores acelerômetro, que mede a aceleração linear nas três dimensões do espaço, e giroscópio, medindo a velocidade angular também em três dimensões.

Dessa maneira, é possível extrair o ângulo de inclinação do robô utilizando qualquer um dos dois sensores, seja utilizando a decomposição do vetor da aceleração da gravidade pelo acelerômetro, ou pela integração da velocidade angular pelo giroscópio.

Porém, de forma a obter uma melhor precisão e eliminação de ruídos, será utilizado um algoritmo de fusão de dados, o filtro complementar.

Em casos em que há diferentes fontes de dados para se realizar a medição de uma variável, sendo que uma fonte fornece dados com boa precisão apenas na região de baixa frequência, enquanto a outra fonte fornece dados com boa precisão apenas

na região de alta frequência, é possível realizar a fusão de dados e atenuar os ruídos utilizando um filtro complementar.

O filtro complementar se baseia em utilizar um filtro passa-baixa na fonte com ruídos em alta frequência, como o caso do acelerômetro que é sensível a vibrações, e um filtro passa-alta na fonte com ruídos de baixa frequência, como o caso do giroscópio que desvia do valor real de medição a longo termo devido à integração da velocidade angular. (MIT Open Courseware, 2004)

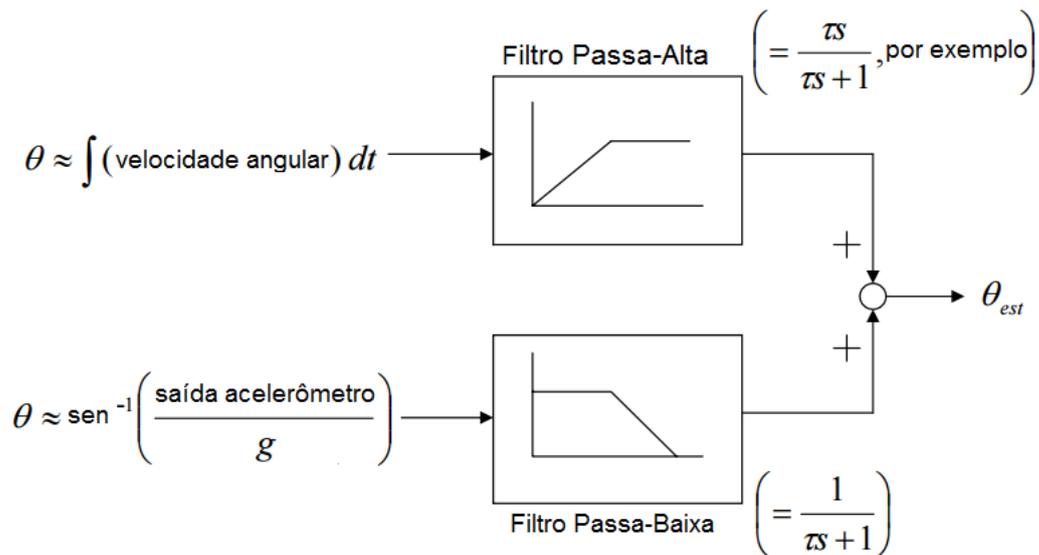


Figura 20 – Funcionamento do filtro complementar

Fonte: (MIT Open Courseware, 2004)

### 3.7 Modelagem do motor DC

Foi escolhido para este projeto, motores do tipo corrente contínua modelo AK555, da empresa Akiyama, com uma redução de trem de engrenagens acoplado em sua saída.

Seus parâmetros, elétricos e mecânicos, podem ser consultados na Tabela 3:

Tabela 3 - Parâmetros do motor DC

Parâmetro	Valor
Tensão nominal	24 V
Torque nominal	6 kgf.cm
Corrente de partida	8 A
Resistência de armadura	2,5 ohms
Indutância	1,6 mH
Constante de torque	$4,09 \times 10^{-3}$ Nm/A
Redução	1:24

Fonte: (Neoyama)

Portanto, um modelo tradicional utilizado para a representação de um motor de corrente contínua foi utilizado, baseando-se no modelo apresentado no livro *Automatic Control Systems* (Kuo e GOLNARAGHI, 2010), demonstrado na Figura 21.

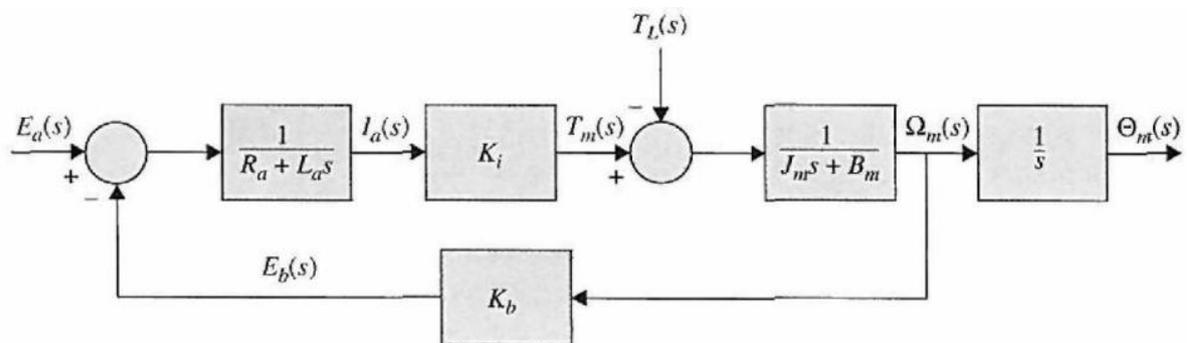


Figura 21 – Diagrama de blocos do sistema de um motor DC

Fonte: (Kuo e GOLNARAGHI, 2010)

O modelo demonstrado foi adaptado, de forma a melhor atender os requisitos desse projeto. Sendo assim, foi criado um modelo, como na Figura 22, em que a entrada do sistema é a tensão de entrada para o motor, e a saída o torque exercido pelo motor no sistema.

É importante notar que as perdas por atrito foram desconsideradas, e que existe uma segunda entrada para a velocidade da roda do robô, já que o torque exercido pelo motor depende da rotação de seu eixo, ou seja, depende da dinâmica do sistema.

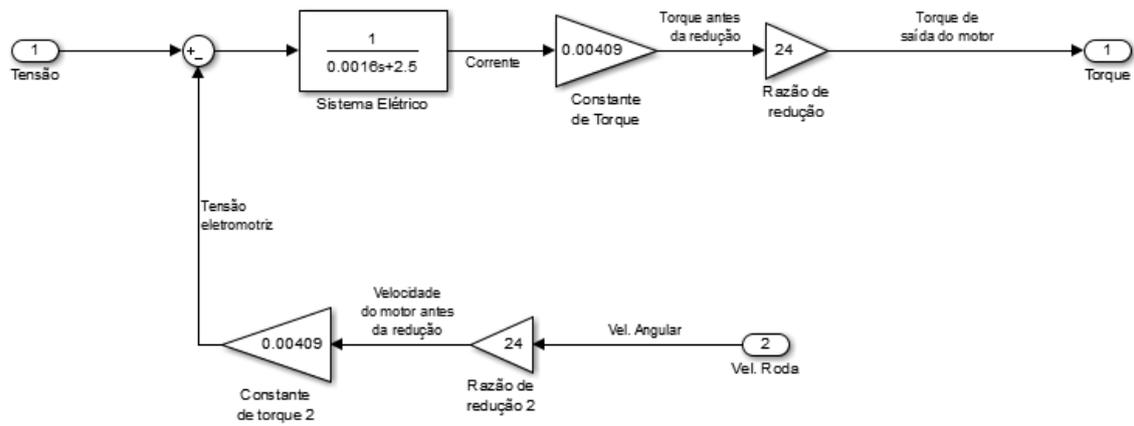


Figura 22 – Diagrama de blocos do modelo dinâmico do motor de corrente contínua  
 Fonte: próprio autor

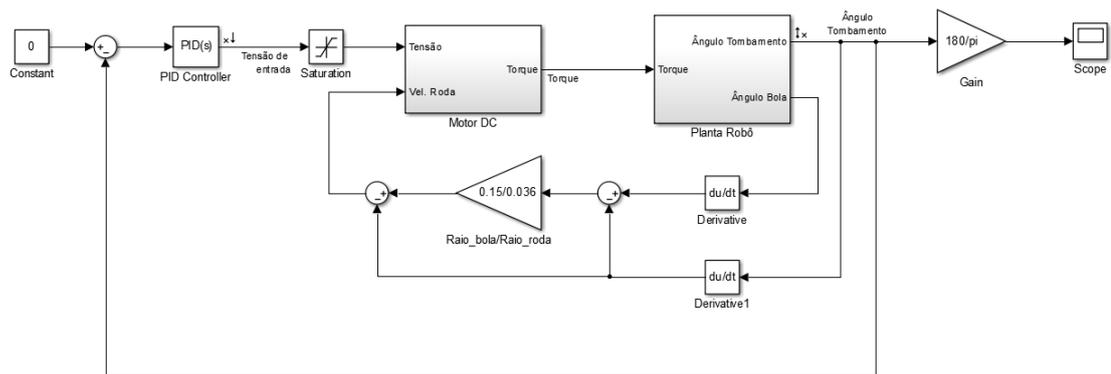


Figura 23 – Diagrama de blocos do modelo dinâmico total do sistema do ballbot  
 Fonte – próprio autor

### 3.8 Resultados obtidos

Após a impressão de todas as peças do protótipo e montagem do mesmo, é possível observar pela Figura 24 que o resultado se tornou muito semelhante ao proposto no projeto CAD.

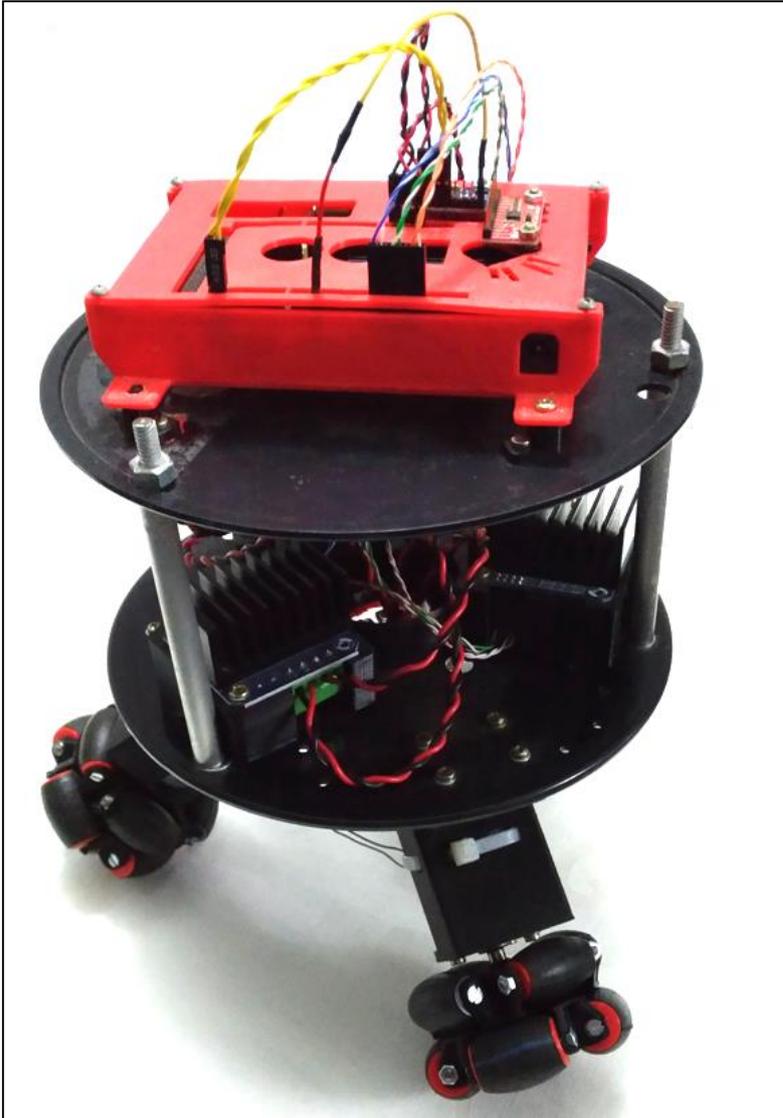


Figura 24 – Protótipo do ballbot montado

Fonte: próprio autor

Para a obtenção dos ganhos do controlador PID, foi utilizada a ferramenta de PID Tuner do software Matlab, juntamente da ferramenta Simulink. Para tanto, o modelo como demonstrado na Figura 23 em diagrama de blocos foi inserido no Simulink. Uma extração da função transferência de malha aberta foi feita, e então essa função transferência foi utilizada para a calibração dos ganhos de PID.

Os ganhos de PID foram calibrados para uma entrada do tipo “degrau unitário”, tendo como base minimizar o sobressinal, diminuindo o tempo de acomodação e o “tempo de subida”, porém sem que a resposta seja agressiva demais ou que cause oscilações.

Com isso, foram encontrados os ganhos:  $K_p = 790$ ,  $K_i = 600$  e  $K_d = 90$ , em que para esses ganhos, parâmetros do sistema estão demonstrados na Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros do sistema

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
Tempo de subida	0,032 s
Tempo de acomodação	0,96 s
Sobre-sinal	13,3%

Fonte: próprio autor

Para o teste da aquisição dos dados do ângulo de inclinação foi realizada uma coleta dos ângulos calculados por cada um dos sensores independentemente, acelerômetro e giroscópio, e o ângulo calculado após o filtro complementar.

Esses dados foram retirados a partir do programa final do projeto, com a intenção de que o resultado observado seja exatamente o mesmo do quando o ballbot estiver em cima da bola.

Todas as medições foram extraídas de linhas sequenciais do programa, de forma que eles representem um mesmo instante de avaliação. Dessa maneira foi possível obter o resultado do ângulo calculado utilizando os dados do acelerômetro, demonstrado no Gráfico 1; utilizando o giroscópio, demonstrado no Gráfico 2; e após a utilização do filtro complementar, no Gráfico 3.

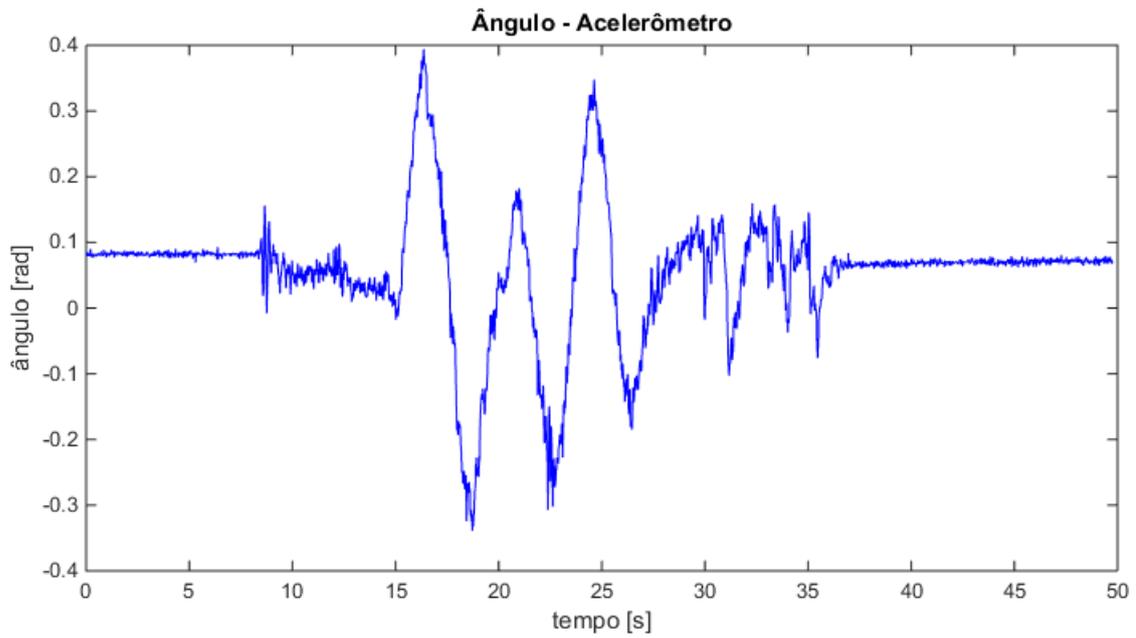


Gráfico 1 – ângulo obtido através dos dados brutos do acelerômetro

Fonte: próprio autor

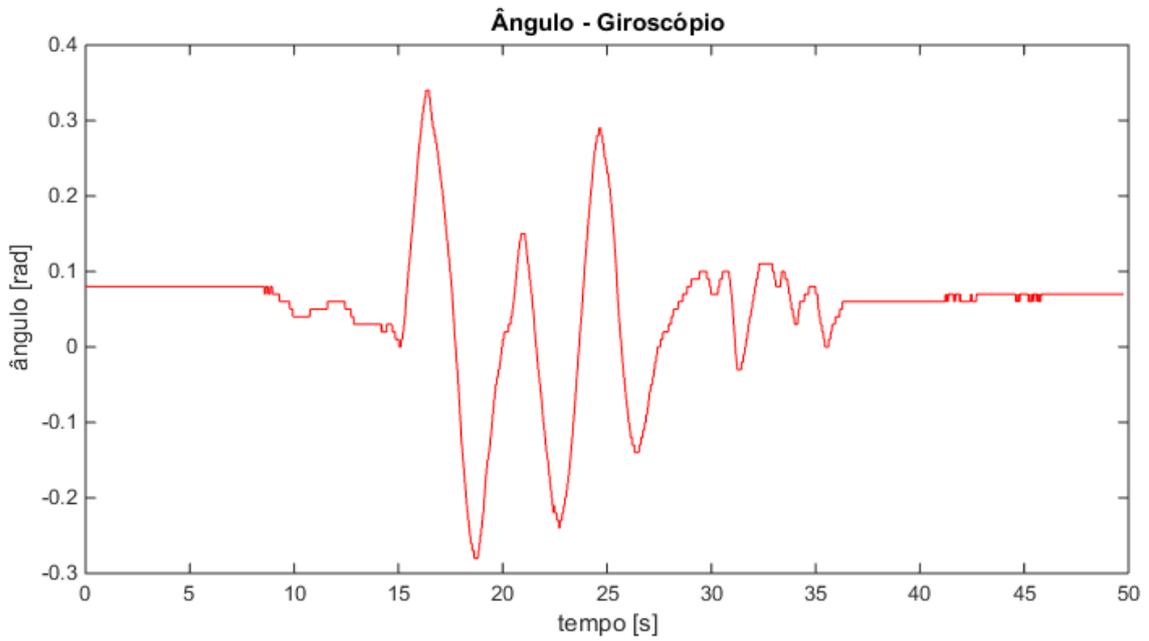


Gráfico 2 – ângulo obtido através da integração dos dados brutos do giroscópio

Fonte: próprio autor

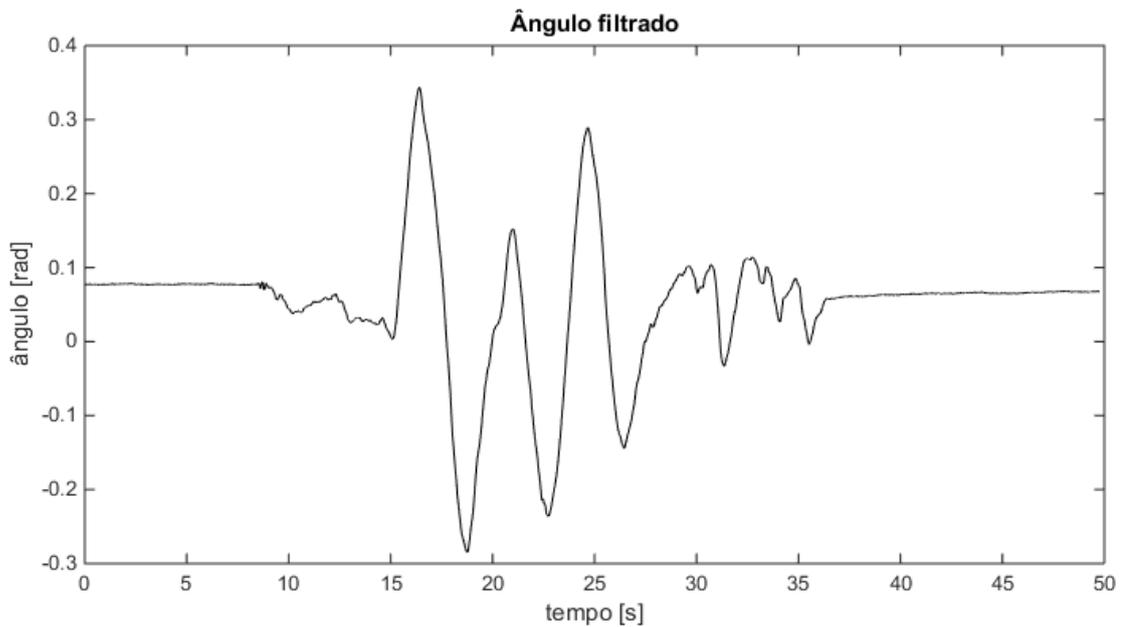


Gráfico 3 – ângulo obtido através da fusão de dados do acelerômetro e giroscópio utilizando filtro complementar

Fonte: próprio autor

É possível observar que o ângulo calculado a partir do acelerômetro possui muito ruído em baixa frequência, embora tenha uma resposta mais rápida que o ângulo calculado a partir da integração do giroscópio no tempo, que possui uma forma mais quadriculada, porém sem o ruído em baixa frequência.

Após a utilização do filtro, o ângulo calculado se torna muito mais suavizado que os anteriores, demonstrando uma forma muito mais adequada para a utilização do ballbot.

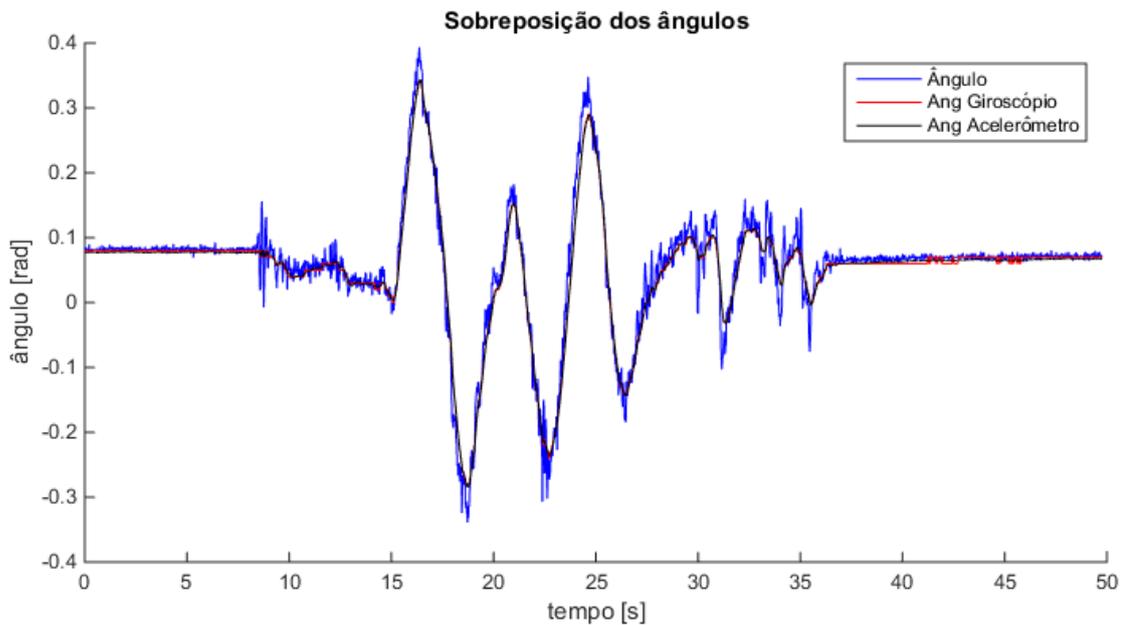


Gráfico 4 – sobreposição dos três gráficos anteriores

Fonte: próprio autor

Com a mensuração do ângulo sendo realizada de forma correta e o protótipo já construído, foi feito o teste de equilíbrio em cima da bola, utilizando os ganhos calculados a partir do modelo realizado.

A princípio, os ganhos se mostraram agressivos, causando vibrações no sistema. Dessa forma, resolveu-se ajustar os ganhos baseados nos sintomas apresentados.

Assim, os ganhos foram todos sendo reduzidos proporcionalmente até que atingissem um estado em que o robô conseguisse demonstrar um equilíbrio sobre a bola.

Além disso, percebeu-se que o sistema é muito sensível ao ganho derivativo, visto que ele amplifica as vibrações e os ruídos do sistema, causando instabilidade. Logo, de forma prática, foi encontrado os ganhos que melhor trouxeram equilíbrio ao ballbot:  $K_p = 250$ ,  $K_i = 170$  e  $K_d = 5$ .

É importante frisar que embora o equilíbrio tenha sido alcançado, não há um controle de posição para o robô, e portanto o mesmo necessita de espaço para que possa se manter estável.



## 4 CONCLUSÃO

É possível concluir que o projeto como um todo apresentou sucesso em sua realização, pois passou por todas as etapas propostas, culminando no desenvolvimento de um dispositivo que conseguiu atingir seu objetivo final: o equilíbrio.

O modelo do sistema foi criado e atualizado conforme as correções vistas ao longo da construção do protótipo, sendo que o mesmo foi desenvolvido como planejado no projeto em CAD e obtendo um bom resultado em seu funcionamento. O modelo foi simulado e apresentou estabilidade segundo o software Matlab, de mesmo modo que a programação, a aquisição de dados e a filtragem desses dados adquiridos através dos sensores utilizados também demonstraram êxito.

E finalmente, com o teste prático utilizando todas as realizações juntas, o projeto demonstrou equilíbrio sobre a bola. Embora, a princípio, com a utilização dos ganhos calculados na simulação o projeto não tenha demonstrado o desempenho esperado, isso pode ser recorrente à algumas imperfeições devido à produção do modelo inicial, que não contempla perdas por atrito e nem mesmo zonas mortas presentes na atuação do motor, nas folgas da redução de torque, ou na falta de rolamentos das rodas omnidirecionais.

Ao final, com alguns ajustes nos ganhos baseados nos sintomas apresentados pelo ballbot, o mesmo conseguiu atingir o equilíbrio proposto.

Visto a falta de controle de posição neste projeto, percebe-se que, embora o ballbot apresente um equilíbrio de seu ângulo de inclinação, o mesmo utiliza uma grande área de movimentação para o manter. Logo, uma das melhorias propostas para um futuro trabalho seria a implementação de odômetros em cada um dos motores, de forma a obter uma boa leitura dos deslocamento dos mesmos, e assim servir como alimentação de uma malha para o controle de posição e velocidade do projeto.



## REFERÊNCIAS

BLONK, K. V. D. **Modeling and Control of a Ball-Balancing Robot**. University of Twente. Enschede, Holanda, p. 139. 2014.

DIGI-KEY Eletronics. **Digi-Key Eletronics**. Disponível em: <<http://www.digikey.com/product-detail/en/infineon-technologies/BTS7960B/BTS7960BINCT-ND/1557914>>. Acesso em: Outubro 2016.

FALFLORES. 3 wheels Omnidirectional plataforma. **Thingiverse**, 2015. Disponível em: <<http://www.thingiverse.com/thing:908535>>. Acesso em: 2016.

FANKHAUSER, P.; GWERDER, C. **Modeling and Control of a Ballbot**. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich. [S.l.]. 2010.

FELÍCIO, L. C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2<sup>a</sup>. ed. São Carlos: RiMa, 2010.

HOPKINSON, N. **Additive Manufacturing: Technology and Applications**. British Educational Communications and Technology Agency. Loughborough, UK. 2010.

HOPKINSON, N.; HAGUE, R. M. J.; DICKENS, P. M. **Rapid Manufacturing an Industrial Revolution for the Digital Age**. [S.l.]: John Wiley and Sons Ltd, 2005.

KUMAGAI, M.; OCHIAI, T. **Development of a Robot Balanced on a Ball – First Report, Implementation of the Robot and Basic Control**. Tohoku Gakuin University. [S.l.]. 2009.

KUO, B. C.; GOLNARAGHI, F. **Automatic Control Systems**. 9<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Wiley, 2010.

LAUWERS, T.; KANTOR, G.; HOLLIS, R. **One is Enough!** Carnegie Mellon University. Pittsburgh, PA, USA. 2005.

MIT Open Courseware. [ocw.mit.edu](http://ocw.mit.edu), 2004. Disponível em: <[https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-333-aircraft-stability-and-control-fall-2004/lecture-notes/lecture\\_15.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-333-aircraft-stability-and-control-fall-2004/lecture-notes/lecture_15.pdf)>. Acesso em: Outubro 2016.

NAGARAJAN, U.; KANTOR, G.; HOLLIS, R. **A Dynamically Stable Single-Wheeled**. Carnegie Mellon University. Pittsburgh, PA, USA. 2006.

NAGARAJAN, U.; KANTOR, G.; HOLLIS, R. The ballbot: An omnidirectional balancing mobile robot. **The International Journal of Robotics**, Novembro 2013.

NEOYAMA. Disponível em: <[www.neoyama.com.br](http://www.neoyama.com.br)>. Acesso em: 23 Julho 2016.

PRINTRBOT. Disponível em: <[printrbot.com](http://printrbot.com)>. Acesso em: 20 Julho 2016.

STRATASYS. Disponível em: <[www.stratasys.com/br/impressoras-3d/technologies/fdm-technology](http://www.stratasys.com/br/impressoras-3d/technologies/fdm-technology)>. Acesso em: Agosto 2016.

## Apêndice A – Conversão de torque entre a roda virtual e as rodas reais

O modelo considerado nesse projeto utiliza como princípio uma única roda virtual para cada um dos planos XZ e YZ, situada no topo da bola. Porém o sistema real do protótipo construído utiliza um sistema de três rodas omnidirecionais que atuam de forma aproximada ao da roda virtual. Sendo assim, é necessário que haja uma conversão entre ambos os sistemas, de modo que o torque atuante na roda virtual seja convertido ao torque individual para cada uma das três rodas omnidirecionais.

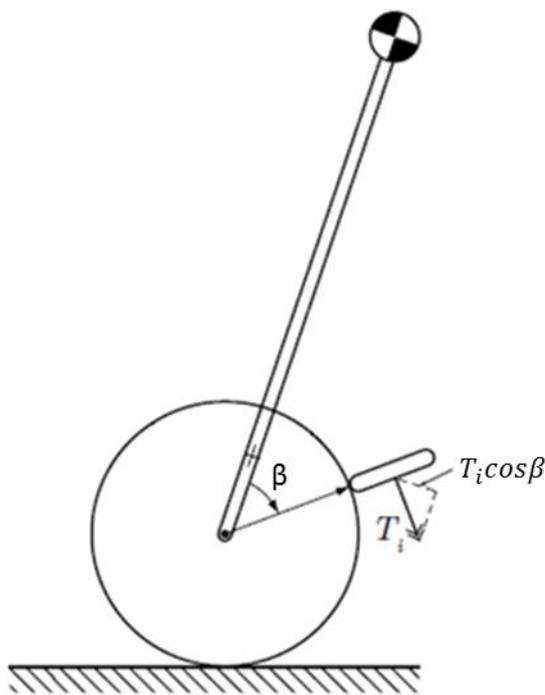


Figura 25 - Representação do sistema de rodas omnidirecionais

Fonte: (FANKHAUSER e GWERDER, 2010)

Assumindo que todas as rodas possuem o mesmo raio, temos que a força exercida em cada roda é o torque de cada roda dividida pelo seu raio, como demonstrado na equação (A.1).

$$F_{roda} = \frac{T_{roda}}{r_{roda}} \quad (A.1)$$

Como o sistema utilizado para a locomoção do robô é um sistema que possui três rodas omni-direcionais formando um ângulo de  $60^\circ$  entre cada um de seus eixos, deve-se calcular uma conversão entre os torques do sistema omnidirecional e o sistema cartesiano, como mostra a Figura 26.

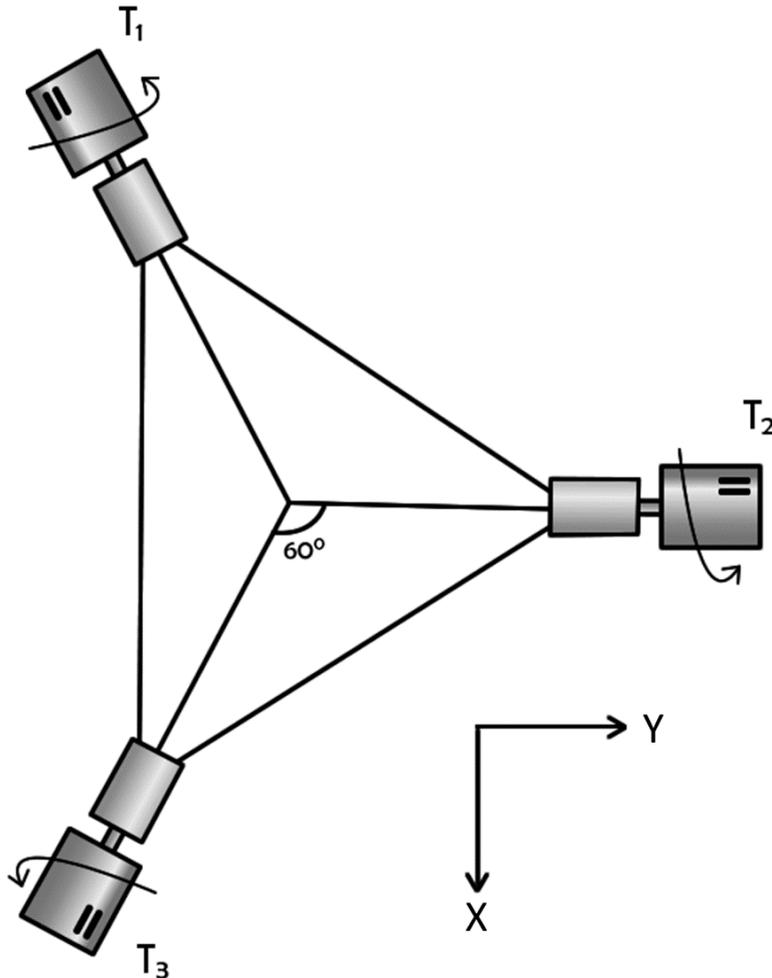


Figura 26 – Sistema de rodas omni-direcionais

Fonte: próprio autor

Dessa forma, assume-se primeiramente uma conversão em que as rodas omnidirecionais estão posicionadas no mesmo plano de uma roda imaginária cartesiana.

Logo, sua conversão de torques pode ser expressa pelas equações (A.2) e (A.3).

$$F_{x,real} = F_1 - F_2 \cdot \sin 30^\circ - F_3 \cdot \sin 30^\circ \quad (\text{A.2})$$

$$F_{y,real} = -F_2 \cdot \sin 60^\circ + F_3 \cdot \sin 60^\circ \quad (A.3)$$

Utilizando a conversão entre força e torque demonstrada na equação (A.1), pode-se encontrar a relação entre os torque.

$$T_{y,real} = T_1 - T_2 \cdot \sin 30^\circ - T_3 \cdot \sin 30^\circ \quad (A.4)$$

$$T_{x,real} = -T_2 \cdot \sin 60^\circ + T_3 \cdot \sin 60^\circ \quad (A.5)$$

Porém as rodas reais e a roda virtual não estão situadas todas em um mesmo plano, já que a roda virtual tem contato no topo da bola, enquanto as reais possuem um ângulo de contato de  $40^\circ$ .

Sendo assim, assume-se que o sistema bola-roda funcione como um trem de engrenagens, e que as rodas omni-direcionais fazem contato com uma roda intermediária que transmite o torque para a bola, como demonstrado na Figura 27.

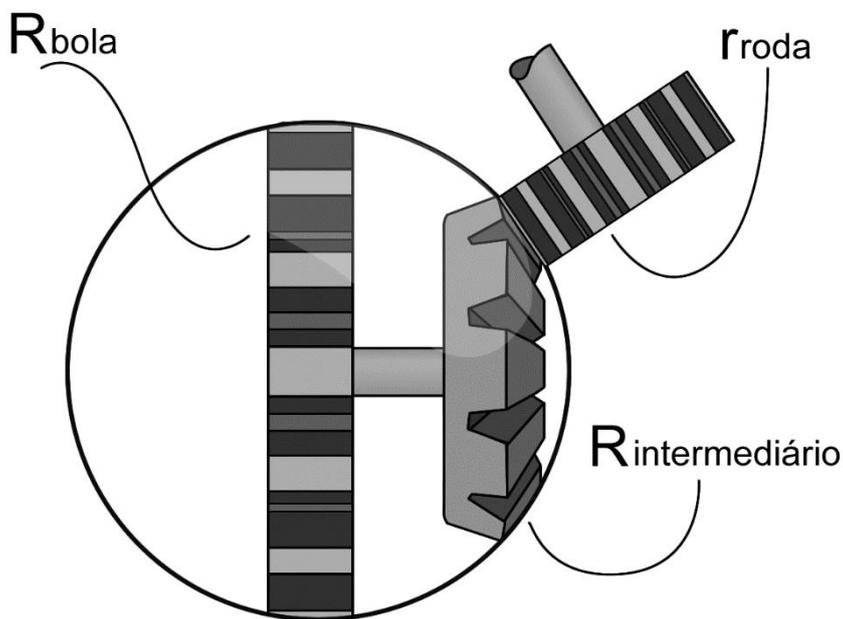


Figura 27 – Relação de transmissão entre a bola e a roda

Fonte: próprio autor

Logo, é possível obter a equação (A.6) para o raio da roda intermediária:

$$R_{intermediária} = R_{bola} \cdot \cos \beta \quad (\text{A.6})$$

Tratando ainda como um sistema de engrenagens, é possível converter o torque real cartesiano para o torque virtual cartesiano, como pode ser visto na equação (A.7).

$$T_{real} \cdot \frac{R_{intermediária}}{r_{roda}} = T_{virtual} \cdot \frac{R_{bola}}{r_{roda}} \quad (\text{A.7})$$

Sendo que, utilizando a equação (A.6), a equação (A.7) pode ser simplificada para a equação (A.8):

$$T_{real} \cdot \cos \beta = T_{virtual} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo a conversão (A.8) para as equações (A.4) e (A.5), temos a conversão entre o sistema virtual (fornecido pela simulação) e o sistema real de motores:

$$T_{y,real} = \cos \beta \cdot (T_1 - T_2 \cdot \sin 30^\circ - T_3 \cdot \sin 30^\circ) \quad (\text{A.9})$$

$$T_{x,real} = \cos \beta \cdot (-T_2 \cdot \sin 60^\circ + T_3 \cdot \sin 60^\circ) \quad (\text{A.10})$$

Solucionando para os torques dos motores, e considerando o ângulo de contato das rodas  $\beta = 40^\circ$ , podem ser encontradas as equações de conversão finais, demonstradas pelas equações (A.11), (A.12) e (A.13):

$$T_{roda,1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{T_y}{\cos \beta} \quad (\text{B.11})$$

$$T_{roda,2} = -\frac{1}{\cos \beta} \cdot (T_y + \sqrt{3} \cdot T_x) \quad (\text{B.12})$$

$$T_{roda,3} = \frac{1}{\cos \beta} \cdot (-T_y + \sqrt{3} \cdot T_x) \quad (\text{B.13})$$