

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

BRUNO CAPRISTO WATANABE

**Utilização do método dos elementos finitos aliado à técnica de homogeneização
periódica para a obtenção das propriedades equivalentes do piezocompósito MFC d33**

São Carlos

2012

BRUNO CAPRISTO WATANABE

**Utilização do método dos elementos finitos aliado à técnica de homogeneização
periódica para a obtenção das propriedades equivalentes do piezocompósito MFC d33**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade
de São Paulo para a obtenção do título de Engenheiro
Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Areias Trindade

São Carlos

2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

W324 Watanabe, Bruno Capristo
Utilização do método dos elementos finitos aliado
à técnica de homogeneização periódica para a obtenção
das propriedades equivalentes do piezocompósito MFC d33
/ Bruno Capristo Watanabe; orientador Marcelo Areias
Trindade. São Carlos, 2012.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2012.

1. MFC. 2. Piezocompósito. 3. Transdutor
Piezelétrico. 4. Homogeneização Periódica. 5. Elementos
Finitos. I. Título.

FOLHA DE AVALIAÇÃO

Candidato: Bruno Capristo Watanabe

Título: Utilização do método dos elementos finitos aliado à técnica de homogeneização periódica para a obtenção de propriedades equivalentes para o piezocompósito MFC d33.

Trabalho de Conclusão de Curso em
Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo.

Orientador: Marcelo de Areias Trindade

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Areias Trindade

Nota atribuída: 10,0 (dez) _____
(assinatura)

Prof. Dr. Paulo Sérgio Varoto

Nota atribuída: 10,0 (dez) _____
(assinatura)

Prof. Dr. Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira

Nota atribuída: 10,0 (dez) _____
(assinatura)

Média: 10,0 (dez) _____

Resultado: APROVADO

Data: 19/11/2012

RESUMO

Neste trabalho, foram aplicados dois métodos para a caracterização das propriedades homogêneas efetivas de RVEs do transdutor piezocompósito MFC d33, para diferentes valores de FVF. Um dos métodos é analítico, chamado de Regras de misturas, ao passo que o outro é um método numérico que aplica uma técnica de homogeneização periódica em elementos finitos. O RVE utilizado nas regras de mistura representa a camada ativa do transdutor, composta por uma fibra piezoelétrica e uma matriz de epóxi. O método numérico foi aplicado em três RVEs diferentes: um de camada ativa, um de camada ativa + eletrodos e um de MFC d33 completo (camada ativa + eletrodos + camada de kapton). Uma boa correlação foi encontrada quando comparados os resultados dos diferentes RVEs. Observou-se que ao mesmo tempo em que a inserção de camadas de kapton torna o transdutor mais flexível, ela também reduz o seu desempenho. Além disso, a configuração dos modelos quanto ao potencial elétrico dos eletrodos é um fator que promove variações locais nas propriedades do RVE como um todo.

Palavras-chave: Piezocompósitos, transdutores piezoelétricos, caracterização de propriedades, regras de mistura, homogeneização periódica em elementos finitos.

ABSTRACT

In this work, two methods were applied to characterize the effective material properties of RVEs from the longitudinal d33 macro-fibre composite (MFC), for different values of FVF. One of these methods is the analytical mixing rules, whereas the other is a numerical method which applies a periodic finite elements homogenization technique. The RVE used in mixing rules represents the active layer of the transducer, which comprises a piezoelectric fiber and an epoxy matrix. The numerical method was applied in three different RVEs: only active layer, active layer + electrodes and complete d33 MFC (active layer + electrodes + kapton layers). A good correlation was found when comparing the results of different RVEs. It was observed that at the same time the inclusion of kapton layers make the transducer more flexible, it also reduces its performance. Furthermore, the configuration of the models on the electric potential of the electrodes is a factor that promotes local variations in the properties of RVEs as a whole.

Keywords: piezocomposites, piezoelectric transducers, properties characterization, mixing rules, periodic finite element homogenization.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	8
1.1. Transdutores piezocompósitos	8
1.2. Objetivo	12
2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS	13
2.1. Equações constitutivas para materiais piezoelétricos	13
2.2. Regras de mistura para propriedades piezoelétricas do MFC d33	15
3. METODOLOGIA.....	20
3.1. Cálculo das propriedades efetivas da camada ativa do MFC d33 pelo método das regras de mistura	20
3.2. Homogeneização numérica em elementos finitos do MFC d33.....	21
3.3. Cálculo numérico das propriedades efetivas do MFC d33	27
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	28
4.1. Propriedades efetivas da camada ativa	28
4.2. Propriedades efetivas do MFC d33.....	36
4.3. Comparação entre os resultados numéricos e o analítico.....	43
5. CONCLUSÕES.....	48
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ¹	49

1. INTRODUÇÃO

1.1. Transdutores piezocompósitos

A aplicação de materiais piezoelétricos se expandiu para muitos campos de atuação, desde a descoberta do efeito piezoelétrico pelos irmãos Curie, em 1880. Uma visão geral destas aplicações encontra-se em um trabalho de Nuffer e Bein (2006). Este efeito consiste basicamente na propriedade que certos materiais, a exemplo dos cristais de quartzo, possuem de converter energia mecânica em elétrica, e vice-versa. Atualmente, a cerâmica de titanato zirconato de chumbo (PZT) é o material mais empregado em sensores, atuadores e transdutores piezoelétricos (Nuffer; Bein, 2006), devido ao seu custo relativamente baixo, à sua larga faixa de aplicação e à sua boa capacidade de atuação.

Aplicações recentes têm exigido que transdutores piezoelétricos possuam maior conformabilidade e flexibilidade. Dentre estas aplicações estão o controle vibracional, o monitoramento de estruturas, o controle de forma e a captação de energia (energy harvesting). As cerâmicas monolíticas de PZT, apesar das suas boas propriedades piezoelétricas, apresentam dificuldade em se adaptarem a estruturas de curvaturas complexas, além de serem frágeis, o que limita sua utilização nessas aplicações. Para contornar este problema é possível utilizar os transdutores de material piezocompósito. Estes transdutores são basicamente compostos por uma camada ativa separando duas camadas de eletrodos, ambas confinadas entre outras duas camadas finas de encapsulamento. A camada ativa consiste de fibras piezoelétricas orientadas e alinhadas e uma matriz de resina epóxi. Os eletrodos podem ser tanto contínuos, quanto interdigitados. Quando são contínuos, aplica-se uma diferença de potencial entre os eletrodos superior e inferior, gerando um campo elétrico perpendicular ao plano do transdutor, e as fibras de PZT são acionadas no modo d31 (modo transversal). No caso de os eletrodos serem interdigitados, gera-se um campo curvilíneo, quase todo alinhado com a direção longitudinal do transdutor, e as fibras são acionadas no modo d33 (modo longitudinal). Os transdutores de materiais piezocompósitos diferem quanto à configuração dos eletrodos e à configuração da camada ativa. Na figura 1, estão representados os tipos de configurações da camada ativa, e na figura 2 as configurações dos eletrodos citadas (Deraemaeker; Nasser, 2010).

Uma das principais vantagens da utilização de transdutores compósitos é a possibilidade de se modelar as propriedades do material, variando-se proporções e geometrias de seus componentes, de forma a otimizá-los (Guimarães et al., 2010). Por outro lado, tem-se que no modo d31, devido a uma grande diferença entre os valores das permissividades dielétricas da fibra piezoelétrica e da matriz de epóxi, ocorre uma redução considerável no campo elétrico aplicado na camada ativa, mesmo com uma camada muito

fina de epóxi entre os eletrodos. No modo d_{33} , o rendimento é maior e, portanto, são alcançadas maiores deformações. Entretanto, devido ao espaçamento das interdigitações, que é de 6 vezes a espessura do transdutor, as tensões aplicadas aos eletrodos precisam ser mais elevadas (Deraemaeker et al., 2009).

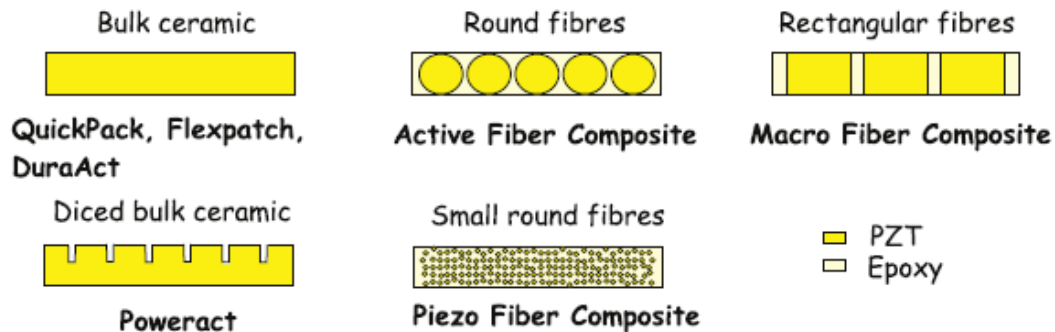


Figura 1 - Diferentes configurações de piezocompósitos existentes. Fonte: Deraemaeker; Nasser (2010).

Entre 1997 e 2002, pesquisadores do MIT (Massachusetts Institute of Technology), visando resolver o problema, tentaram aumentar a permissividade da resina epóxi, porém não obtiveram sucesso. Outra proposta foi colocar fibras cilíndricas em contato direto com os eletrodos, mas as dificuldades de produção a tornaram impraticável (Deraemaeker et al., 2007).

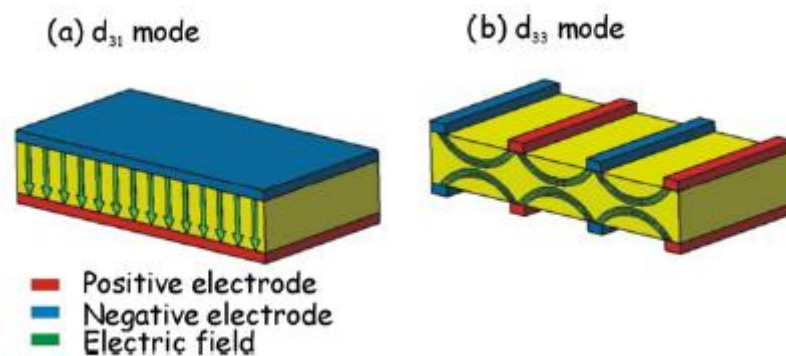


Figura 2 - Configuração dos eletrodos e do campo elétrico nos piezocompósitos (a) d_{31} e (b) d_{33} . Fonte: Deraemaeker; Nasser (2010).

Uma solução efetiva foi criada com um transdutor desenvolvido pela NASA, por volta do ano 2000. Os Compósitos de Macro Fibra (MFC) possuem fibras retangulares, seu custo de produção é relativamente baixo e apresentam boa repetitividade. A disposição das fibras permite que haja contato direto entre fibras e eletrodos, resolvendo o problema de incompatibilidade de permissividades. Foram desenvolvidos dois tipos de MFC, um para atuar no modo d_{31} , e um para atuar no d_{33} . Atualmente, eles são fabricados e

comercializados pela companhia *Smart Materials*, da Alemanha (Trindade; Bejeddou, 2011). Nas figuras 3 e 4, estão representados o MFC d31 e o MFC d33, respectivamente.

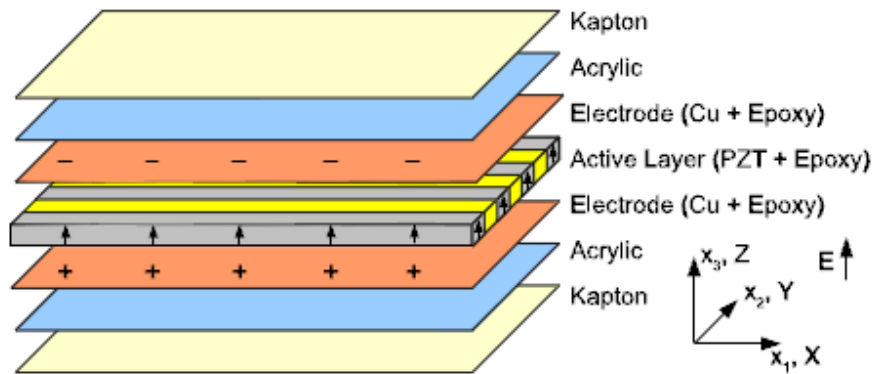


Figura 3 - Representação esquemática do MFC d31. Fonte: Benjeddou e Trindade (2011).

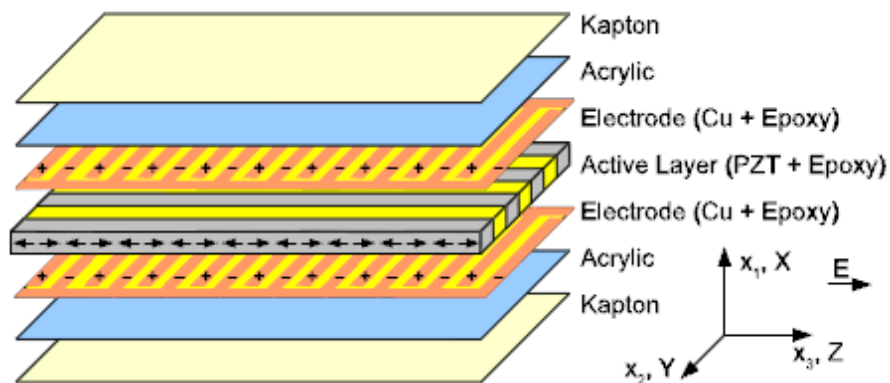


Figura 4 - Representação esquemática do MFC d33. Fonte: Benjeddou e Trindade (2011).

A maior dificuldade no estudo dos MFCs reside no fato de que seu comportamento é bem mais complexo do que o das cerâmicas monolíticas, já que são feitos de várias camadas e materiais diferentes. Portanto, é necessário entendê-lo e modelá-lo para caracterizar as propriedades efetivas do material composto. Recentemente, esforços de pesquisa têm sido direcionados para a identificação e caracterização das propriedades desses transdutores, tanto para o modo longitudinal (d33) quanto para o transversal (d31). Uma técnica de estimativa numérica conhecida como homogeneização, pode ser aplicada para se obter as propriedades efetivas do material composto a partir das propriedades e geometria de cada um dos seus componentes (Trindade; Bejeddou, 2011).

O estudo de materiais compostos utiliza largamente as técnicas de homogeneização. Através delas calculam-se propriedades homogêneas equivalentes de materiais heterogêneos multifásicos. Na figura 5, está um exemplo de composto com conexão 1-3, ou seja, as fibras estão conectadas em uma direção e a matriz em três direções. Nota-se que o material consiste de uma repetição periódica em três direções de um Volume Elementar

Representativo (RVE). As propriedades equivalentes do compósito são obtidas escrevendo-se as equações constitutivas em termos dos valores médios no volume do RVE das variáveis envolvidas no equacionamento:

$$\bar{X} = \frac{1}{V} \int_V X dV$$

em que X é uma variável qualquer presente nas equações constitutivas.

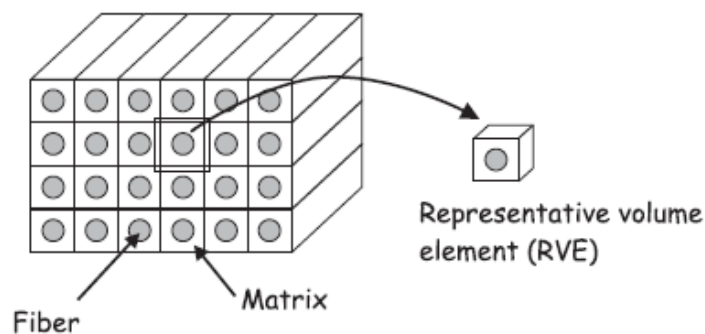


Figura 5 - Representação esquemática de um compósito do tipo 1-3 e de seu RVE. Fonte: Deraemaeker et al. (2010).

Esse método difere dos métodos geralmente apresentados na literatura em três aspectos: (i) no método RVE a configuração real dos eletrodos e as condições equipotenciais resultantes são levadas em consideração, (ii) devido ao fato do tamanho das fibras ser da mesma ordem de grandeza da espessura do transdutor, a periodicidade é considerada apenas no seu plano, e (iii) o vetor de polarização não é considerado constante no RVE e segue as linhas de campo elétrico potencialmente curvas resultantes da configuração real dos eletrodos. O RVE do modo d33 pode ser visto na Figura 6.

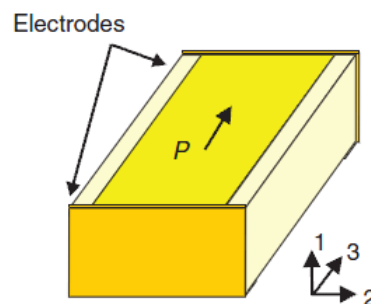


Figura 6 - Volume Elementar Representativo (RVE) do MFC d33. Fonte: Deraemaeker et al. (2009).

Através das equações constitutivas para materiais piezoelétricos e da definição dos RVEs, Deraemaeker, chegou a um conjunto de equações chamado de Regras de Mistura,

do inglês *Mixing Rules*, para determinar as propriedades equivalentes dos MFCs a partir das propriedades dos seus constituintes, (Deraemaeker et al., 2009), e os comparou com resultados numéricos obtidos posteriormente (Deraemaeker; Nasser, 2010).

1.2. Objetivo

Este trabalho tem como objetivo determinar as propriedades equivalentes do transdutor piezocompósito do tipo MFC atuando no modo d33 (longitudinal), através da aplicação de uma metodologia numérica computacional, que combina o Método dos Elementos Finitos (MEF) com a técnica de homogeneização periódica de compósitos, baseada no Volume Elementar Representativo (RVE).

2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

2.1. Equações constitutivas para materiais piezoelétricos

Os materiais piezoelétricos, como já citado anteriormente, são caracterizados pela propriedade de se deformarem na presença de um campo elétrico e, também, de gerarem campo elétrico quando deformados. Nos materiais elásticos, a tensão mecânica é função apenas da deformação, e nos materiais dielétricos, o deslocamento elétrico é função apenas do campo elétrico imposto a ele. Nos materiais piezoelétricos, tanto a tensão mecânica quanto o deslocamento elétrico dependem dos valores conjuntos de campo e de deformação. Seguem abaixo as equações 1 e 2, que são as equações constitutivas para um material piezoelétrico ortotrópico, apresentadas na forma “e” e na forma “d”, respectivamente, utilizando-se as notações padronizadas do Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos (IEEE). (Carbonari, 2003; IEEE, 1996 e IKEDA,1996).

$$\begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [c^E] & -[e]^t \\ [e] & [\varepsilon^S] \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \{S\} \\ \{E\} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \{S\} \\ \{D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [s^E] & -[d]^t \\ [d] & [\varepsilon^T] \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{E\} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Nas equações acima, $[c]$ é a matriz 6x6 de rigidez do material, $[s]$ é a matriz 6x6 de elasticidade do material, $[e]$ é a matriz 3x6 de acoplamento piezoelétrico inverso do material, $[d]$ é a matriz 3x6 de acoplamento piezoelétrico direto do material, $[\varepsilon]$ é a matriz 3x3 de permissividade dielétrica do material, $\{T\}$ é o vetor 1x6 de tensões mecânicas, $\{S\}$ é o vetor 1x6 de deformações, $\{D\}$ é o vetor 1x3 de deslocamento elétrico e $\{E\}$ é o vetor 1x3 de campo elétrico. Os sobrescritos E, S e T denotam que a propriedade em questão vale, respectivamente, para campo elétrico constante, deformação mecânica constante e tensão mecânica constante.

Expandindo-se as matrizes das equações (1) e (2), é possível reescrevê-las em função dos componentes de cada uma destas matrizes, resultando nas equações (3) e (4), abaixo, que representam as equações constitutivas do material nas formas “e” e “d”, respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\ c_{13}^E & c_{23}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{22}^S & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{32} \\ s_{13}^E & s_{23}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{22}^T & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

As componentes dos vetores de deformação e tensão mecânica são definidas conforme as equações (5) e (6):

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Para o modo d33, apesar de as linhas reais de campo elétrico não apresentarem direção constante, quando se substitui a camada ativa por uma camada homogênea equivalente, pode-se considerar que as direções de polarização e de campo elétrico são as mesmas que a direção das fibras, ou seja, $E_1=E_2=0$. Dito isto, a hipótese de estado plano de tensões implica que $T_1=0$. Portanto, as equações (3) e (4) se reduzem, respectivamente, às equações (7) e (8), descritas abaixo.

$$\begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{22}^{E*} & c_{23}^{E*} & 0 & 0 & 0 & -e_{32}^* \\ c_{32}^{E*} & c_{33}^{E*} & 0 & 0 & 0 & -e_{33}^* \\ 0 & 0 & c_{44}^{E*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55}^{E*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{E*} & 0 \\ e_{32}^* & e_{33}^* & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^{S*} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 & d_{32} \\ s_{32}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 \\ d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

O sobrescrito * denota que a propriedade está sob o estado plano de tensões que, no caso da forma “e”, é diferente das propriedades calculadas em três dimensões. A matriz $[c^{E*}]$ é função dos módulos de Young longitudinal e transversal (EL e ET), do módulo de Poisson do plano (ν_{LT}), dos módulos de cisalhamento do plano (GLT) e dos não pertencentes ao plano (GLz e GTz). A matriz $[e^*]$ é dada pela equação (9) e $[d]$ pela equação (10).

$$[e^*] = [d][c^{E*}] \quad (9)$$

$$[d] = [d_{32} \quad d_{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (10)$$

Note que a matriz $[d]$ não se altera com a hipótese de estado plano de tensões (Deraemaeker; Nasser, 2010).

2.2. Regras de mistura para propriedades piezoelétricas do MFC d33

Considera-se um RVE tal que os valores médios de T_i , S_i , D_i e E_i são dados pelas equações (11) e (12):

$$\bar{T}_i = \frac{1}{V} \int_V T_i dV \quad \bar{D}_i = \frac{1}{V} \int_V D_i dV \quad (11)$$

$$\bar{S}_i = \frac{1}{V} \int_V S_i dV \quad \bar{E}_i = \frac{1}{V} \int_V E_i dV \quad (12)$$

Utilizando o método dos campos uniformes (UFM), assume-se que todos os campos são uniformes em cada direção. Os mecanismos de deformação usados na teoria clássica

de laminados, representada na figura (7) são, considerados, levando às igualdades apresentadas na equação (13).

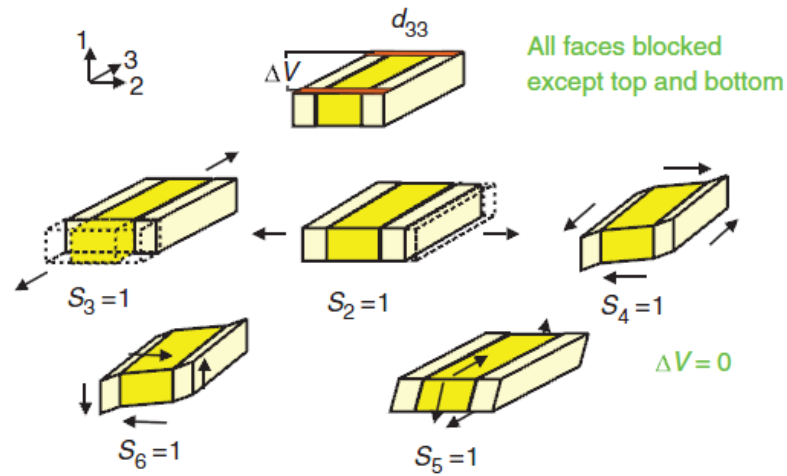


Figura 7 - Seis problemas locais a serem solucionados para o MFC d_{33} . Fonte: Deraemaeker et al. (2009).

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_3 &= S_3^p = S_3^m \\
 \bar{T}_2 &= T_2^p = T_2^m \\
 \bar{T}_4 &= T_4^p = T_4^m \\
 \bar{S}_5 &= S_5^p = S_5^m \\
 \bar{T}_6 &= T_6^p = T_6^m
 \end{aligned} \tag{13}$$

em que “p” faz referência ao material piezoelétrico e “m” a matriz. Para os outros campos, os valores médios são calculados a partir da equação (14):

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_3 &= \rho T_3^p + (1 - \rho) T_3^m \\
 \bar{S}_2 &= \rho S_2^p + (1 - \rho) S_2^m \\
 \bar{S}_4 &= \rho S_4^p + (1 - \rho) S_4^m \\
 \bar{T}_5 &= \rho T_5^p + (1 - \rho) T_5^m \\
 \bar{S}_6 &= \rho S_6^p + (1 - \rho) S_6^m
 \end{aligned} \tag{14}$$

Como os eletrodos são contínuos nas partes frontais e traseiras do RVE, a diferença de potencial elétrico, e portanto, o campo elétrico, são iguais para ambas as fases, resultando na equação (15):

$$\begin{aligned} \bar{E}_3 &= E_3^p = E_3^m \\ \bar{D}_3 &= \rho D_3^p + (1 - \rho) D_3^m \end{aligned} \quad (15)$$

Unindo-se as equações (14) e (15), de forma matricial, obtém-se a equação (16):

$$\begin{Bmatrix} \bar{T}_3 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{T}_5 \\ \bar{S}_6 \\ \bar{D}_3 \end{Bmatrix} = \rho \begin{Bmatrix} T_3^p \\ S_2^p \\ S_4^p \\ T_5^p \\ S_6^p \\ D_3^p \end{Bmatrix} + (1 - \rho) \begin{Bmatrix} T_3^m \\ S_2^m \\ S_4^m \\ T_5^m \\ S_6^m \\ D_3^m \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Utilizando as variáveis que são idênticas nas duas fases como variáveis independentes, a partir das equações (7) e (8), obtém-se as equações constitutivas escritas na forma apresentada na equação (17):

$$\begin{Bmatrix} T_3 \\ S_2 \\ S_4 \\ T_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} S_3 \\ T_2 \\ T_4 \\ S_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

em que A é a matriz dos coeficientes mecânicos, piezoelétricos e dielétricos do transdutor.

Aplicando-se a equação (16) na equação (17), tem-se:

$$\bar{A} \begin{Bmatrix} \bar{S}_3 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{T}_6 \\ \bar{E}_3 \end{Bmatrix} = \rho A_p \begin{Bmatrix} S_3^p \\ T_2^p \\ T_4^p \\ S_5^p \\ T_6^p \\ E_3^p \end{Bmatrix} + (1 - \rho) A_m \begin{Bmatrix} S_3^m \\ T_2^m \\ T_4^m \\ S_5^m \\ T_6^m \\ E_3^m \end{Bmatrix} \quad (18)$$

E finalmente, substituindo-se (13) e (15) em (18), tem-se:

$$\bar{A} = \rho A_p + (1 - \rho) A_m \quad (19)$$

Cada termo da matriz A segue uma regra de mistura linear. Rearranjando essas relações lineares de mistura e as escrevendo em termos de constantes de engenharia, tem-se:

$$E_L = \rho E_L^p + (1 - \rho) E_L^m \quad (20)$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\rho}{E_T^p} + \frac{(1 - \rho)}{E_T^m} \quad (21)$$

$$v_{LT} = \rho v_{LT}^p + (1 - \rho) v_{LT}^m \quad (22)$$

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{\rho}{G_{LT}^p} + \frac{(1 - \rho)}{G_{LT}^m} \quad (23)$$

$$G_{Lz} = \rho G_{Lz}^p + (1 - \rho) G_{Lz}^m \quad (24)$$

$$\frac{1}{G_{Tz}} = \frac{\rho}{G_{Tz}^p} + \frac{(1 - \rho)}{G_{Tz}^m} \quad (25)$$

em que E_L denota ao módulo de Young longitudinal (na direção das fibras), E_T o módulo transversal, v_{LT} o coeficiente de Poisson principal, G_{LT} é o modulo de cisalhamento do plano do transdutor e G_{Tz} e G_{Lz} são os outros módulo de cisalhamento. Para as propriedades piezoelétricas e dielétricas, tem-se:

$$d_{33} = \frac{1}{E_L} \rho d_{33}^p E_L^p \quad (26)$$

$$d_{32} = -d_{33} v_{LT} + \rho (d_{32}^p + d_{33}^p v_{LT}^p) \quad (27)$$

$$\epsilon_{33}^T = \rho \epsilon_{33}^{Tp} + (1 - \rho) \epsilon_{33}^{Tm} \quad (28)$$

Vale ressaltar que a matriz de epóxi não é piezoelétrica e que $d_{31} = d_{32}$ para as fibras. d_{33} segue uma regra de mistura linear envolvendo apenas propriedades longitudinais, enquanto d_{32} depende tanto de propriedades longitudinais como de propriedades transversais.

As propriedades piezoelétricas e_{32} e e_{33} são calculadas conforme as equações (29) e (30), abaixo, apresentadas em Guimarães et al (2010).

$$e_{32} = c_{22}^E \left[\rho \frac{e_{32}^p}{c_{22}^{Ep}} + (1 - \rho) \frac{e_{32}^m}{c_{22}^{Em}} \right] \quad (29)$$

$$e_{33} = \rho e_{33}^p + (1 - \rho)e_{33}^m + \frac{c_{23}^E e_{32}}{c_{22}^E} - \rho \frac{c_{23}^{Ep} e_{32}^p}{c_{22}^{Ep}} - (1 - \rho) \frac{c_{23}^{Em} e_{32}^m}{c_{22}^{Em}} \quad (30)$$

3. METODOLOGIA

3.1. Cálculo das propriedades efetivas da camada ativa do MFC d33 pelo método das regras de mistura

Seguindo-se a metodologia das regras de mistura, desenvolvidas em Deraemaeker et al. (2009) e descrita nas considerações teóricas, são calculadas as propriedades efetivas homogêneas da camada ativa do MFC d33, a partir das propriedades individuais dos seus constituintes, neste caso, a cerâmica SONOX P502 e a resina epóxi. Na tabela 1, abaixo, estão presentes as propriedades mecânicas, piezoelétricas e dielétricas dos materiais SONOX P502, resina epóxi, cobre e kapton. São utilizadas as equações (9) e as equações de (20) a (28) para cálculo das respectivas propriedades.

Tabela 1 - Propriedades dos materiais utilizados no estudo.

Constante	Símbolo	Unidade	SONOX P502	Epóxi	Cobre	Kapton
Módulo de Young	$Y1 = Y2$	GPa	54,05	2,9	117	2,50
	$Y3$	GPa	48,31	2,9	117	2,50
Módulo de cisalhamento	$G_{32} = G_{31}$	GPa	30,12	2,23	86,7	1,87
	G_{12}	GPa	19,12	2,23	86,7	1,87
Coeficiente de Poisson	$\nu_{23} = \nu_{32}$	—	0,34	0,30	0,35	0,34
	ν_{12}	—	0,30	0,30	0,35	0,34
Constante piezoelétrica	$d_{32} = d_{31}$	pC/N	-185	0	0	0
	d_{33}	pC/N	440	0	0	0
	$d_{15} = d_{24}$	pC/N	560	0	0	0
Constante dielétrica relativa	$\frac{\epsilon_{11}^T}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_{22}^T}{\epsilon_0}$	—	1950	4,25	5	3,4
	$\frac{\epsilon_{33}^T}{\epsilon_0}$	—	1850	4,25	5	3,4

3.2. Homogeneização numérica em elementos finitos do MFC d33

Assim como feito por Deraemaeker et al. (2010), este método difere dos outros métodos descritos na literatura, pelos seguintes motivos:

- i. A configuração real dos eletrodos e as condições equipotenciais resultantes são levadas em consideração;
- ii. A condição de periodicidade é imposta apenas no plano do transdutor;
- iii. O vetor de polarização não é constante e acompanha a curva do campo elétrico gerado pela configuração real dos eletrodos.

Os cálculos são feitos para três configurações diferentes de camadas do transdutor. A primeira configuração contempla apenas a camada ativa, composta por fibras piezoelétricas e a matriz de resina epóxi. A segunda possui três camadas: camada de eletrodo, camada ativa e outra camada de eletrodo. E a terceira, que é a representação mais próxima do MFC, cinco camadas: kapton, eletrodo, camada ativa, eletrodo e kapton. As camadas, citadas aqui, se referem às camadas cujos planos são perpendiculares ao eixo x_1 . Em cada uma das configurações varia-se a fração volumétrica de fibra do RVE, no intervalo de 0,0 a 1,0, com passo de 0,1. Calculam-se também as propriedades para o caso especial de 0,86 de FVF, valor usual, utilizado pela fabricante *Smart Material* na fabricação dos transdutores.

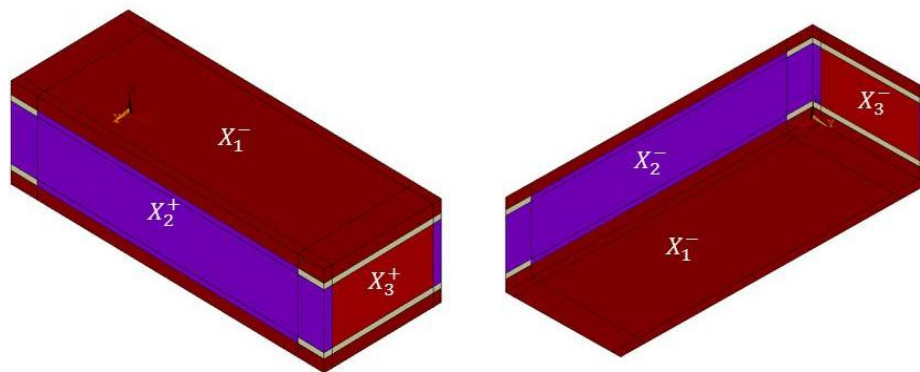


Figura 8 - Localização das fronteiras do RVE.

A homogeneização numérica aplicada ao método dos elementos finitos consiste em impor condições de deslocamento mecânico e potencial elétrico relativos nas fronteiras do RVE ($X_{1+}, X_{1-}, X_{2+}, X_{2-}, X_{3+}, X_{3-}$). Na figura 8, são mostradas as localizações das fronteiras no modelo geométrico do RVE. No caso do RVE que representa o MFC d33, essas fronteiras são: X_{1-} : $x_1=0$, X_{1+} : $x_1=h_K+h_C+h_P+h_C+h_K$, X_{2-} : $x_2=0$, X_{2+} : $x_2=Wt$, X_{3-} : $x_3=0$, X_{3+} : $x_3=L_e+2L_c$. Na figura 9 estão indicadas as variáveis dimensionais do RVE, utilizadas para definir a posição das fronteiras. Os eletrodos são considerados nos planos perpendiculares ao eixo x_1 logo acima e logo abaixo da camada ativa. No caso do d33, em

que os eletrodos são interdigitados, X_1^{e+} representa os eletrodos em que o potencial elétrico aplicado é maior e X_1^{e-} , onde é menor.

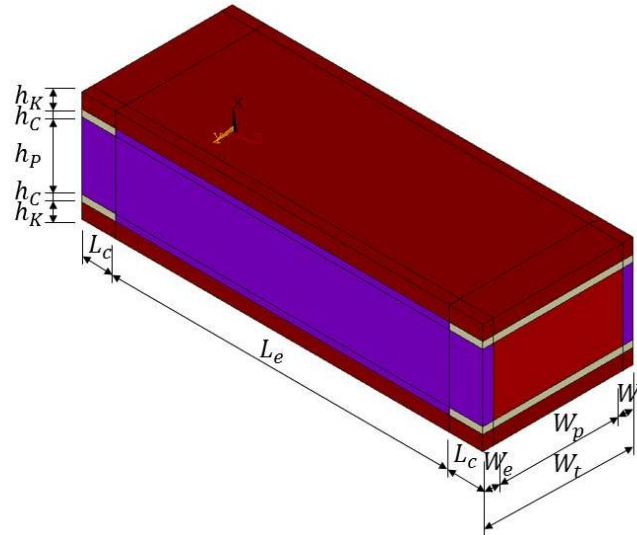


Figura 9 - Dimensões do RVE de 5 camadas do MFC d33.

Valores médios de deformação e campo elétrico podem ser impostos ao RVE, utilizando-se condições de contorno de deslocamento e potencial elétrico, tais que:

$$u_i^{x_j^+} - u_i^{x_j^-} = \overline{S_{ij}}(x_j^{x_j^+} - x_j^{x_j^-}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (31)$$

e

$$\phi^{x_n^+} - \phi^{x_n^-} = -\overline{E_n}(x_n^{x_n^+} - x_n^{x_n^-}) \quad n = 1, 2, 3 \quad (32)$$

Os valores médios resultantes de deformação, tensão mecânica, campo elétrico e deslocamento elétrico no RVE são definidos como:

$$\overline{T_p} = \frac{1}{V} \int_V T_p dV \quad \overline{S_q} = \frac{1}{V} \int_V S_q dV \quad (33)$$

$$\overline{D_i} = \frac{1}{V} \int_V D_i dV \quad \overline{E_k} = \frac{1}{V} \int_V E_k dV \quad (34)$$

com $p, q = 1, \dots, 6$ e $i, k = 1, 2, 3$. Essas integrais são aproximadas no Ansys®, calculadas da seguinte forma:

$$\overline{T}_p = \frac{\sum_{e=1}^N T_p^{(e)} V^{(e)}}{\sum_{e=1}^N V^{(e)}} \quad \overline{S}_q = \frac{\sum_{e=1}^N S_q^{(e)} V^{(e)}}{\sum_{e=1}^N V^{(e)}} \quad (35)$$

$$\overline{D}_i = \frac{\sum_{e=1}^N D_i^{(e)} V^{(e)}}{\sum_{e=1}^N V^{(e)}} \quad \overline{E}_k = \frac{\sum_{e=1}^N E_k^{(e)} V^{(e)}}{\sum_{e=1}^N V^{(e)}} \quad (36)$$

em que $V^{(e)}$ é o volume do elemento “e”. $T_p^{(e)}$, $S_q^{(e)}$, $D_i^{(e)}$ e $E_k^{(e)}$ são os valores médios das respectivas variáveis calculados no elemento “e”. E “N” é o número total de elementos utilizados para discretizar o RVE.

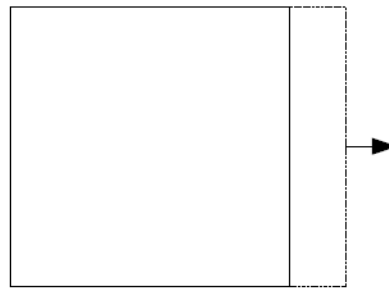


Figura 10 - Representação do problema local utilizado para calcular as constantes elásticas relacionadas a deformações e tensões normais. Fonte: Benjeddou e Trindade (2011).

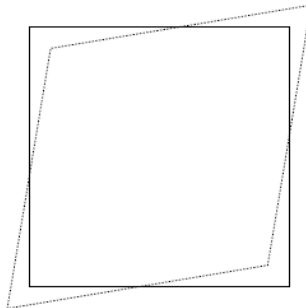
Para o cálculo das constantes elásticas relacionadas às deformações normais e tensões normais c_{pq}^E , $p, q = 1, 2, 3$, três problemas locais são analisados. Aplicam-se deformações normais S_q ($q = 1, 2, 3$), através da imposição de deslocamentos normais relativos $u_q^{X_q^+} - u_q^{X_q^-}$, como mostra a figura 10. A fim de se obterem tensões normais nulas nas direções $j \neq q$, o deslocamento normal u_j é configurado como sendo igual nas superfícies opostas X_j^- e X_j^+ , possuindo graus de liberdade simetricamente acoplados. Para garantir uma condição de contorno de curto circuito, os graus de liberdade relativos ao potencial elétrico são configurados como nulos para as superfícies X_1^{e-} e X_1^{e+} . Portanto, considerando as equações constitutivas (3), as constantes elásticas efetivas são calculadas usando a seguinte expressão:

$$c_{pq}^E = \frac{\overline{\overline{T}_p}}{\overline{\overline{S}_q}} \quad p, q = 1, 2, 3 \quad (37)$$

Os valores médios de cada variável são calculados pelas equações (33) e (34) em cada um dos problemas locais. A tabela 2 indica todas as condições de contorno de simetria adotadas, bem como as equações para obtenção das propriedades efetivas.

Tabela 2 - Condições de contorno e equações que constituem os cálculos numéricos.

Problema	X_1^-/X_1^+	X_2^-/X_2^+	X_3^-/X_3^+	X_1^{e-}/X_1^{e+}	Relação
1	$u_1^{i+} - u_1^{i-} = q$ —	$u_2^{i+} - u_2^{i-} = 0$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$u_3^{i+} - u_3^{i-} = 0$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	— $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$c_{1j}^E = \frac{\bar{T}_j}{\bar{S}_1}$
2	$u_1^{i+} - u_1^{i-} = 0$ —	$u_2^{i+} - u_2^{i-} = q$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$u_3^{i+} - u_3^{i-} = 0$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	— $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$c_{2j}^E = \frac{\bar{T}_j}{\bar{S}_2}$
3	$u_1^{i+} - u_1^{i-} = 0$ —	$u_2^{i+} - u_2^{i-} = 0$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$u_3^{i+} - u_3^{i-} = q$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	— $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$c_{3j}^E = \frac{\bar{T}_j}{\bar{S}_3}$
4	$u_1^{i+} - u_1^{i-} = 0$ —	$u_3^{i+} - u_3^{i-} = q$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$u_2^{i+} - u_2^{i-} = q$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	— $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$c_{44}^E = \frac{\bar{T}_4}{\bar{S}_4}$
5	$u_3^{i+} - u_3^{i-} = q$ —	$u_2^{i+} - u_2^{i-} = 0$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$u_1^{i+} - u_1^{i-} = q$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	— $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$c_{55}^E = \frac{\bar{T}_5}{\bar{S}_5}$
6	$u_2^{i+} - u_2^{i-} = q$ —	$u_1^{i+} - u_1^{i-} = q$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$u_3^{i+} - u_3^{i-} = 0$ $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	— $\phi^{i+} - \phi^{i-} = 0$	$c_{66}^E = \frac{\bar{T}_6}{\bar{S}_6}$
7	$u_1^{i+} - u_1^{i-} = 0$ —	$u_2^{i+} - u_2^{i-} = 0$ —	$u_3^{i+} - u_3^{i-} = 0$ —	— $\phi^{i+} - \phi^{i-} = q$	$e_{3j} = -\frac{\bar{T}_j}{\bar{E}_3}$ $\epsilon_{33}^S = \frac{\bar{D}_3}{\bar{E}_3}$
8	— —	— —	— —	— $\phi^{i+} - \phi^{i-} = q$	$d_{3j} = \frac{\bar{S}_j}{\bar{E}_3}$ $\epsilon_{33}^T = \frac{\bar{D}_3}{\bar{E}_3}$

**Figura 11** - Representação do problema local utilizado para calcular as constantes elásticas relacionadas a deformações e tensões cisalhantes. Fonte: Benjeddou e Trindade (2011).

Para o cálculo das constantes elásticas relacionadas a deformações e tensões de cisalhamento c_{pp}^E , $p, q = 4, 5, 6$, outros três problemas locais são analisados, aplicando-se deformações cisalhantes S_{ik} através da imposição de deslocamentos cisalhantes relativos

$u_i^{X_k^+} - u_i^{X_k^-}$ nas superfícies X_k^- e X_k^+ , e $u_k^{X_i^+} - u_k^{X_i^-}$ nas superfícies X_i^- e X_i^+ , como mostra a figura 11. A fim de obter tensões normais nulas na direção paralela ao plano cisalhante, os deslocamentos normais nestas direções são configurados como graus de liberdade simetricamente acoplados. Para garantir uma condição de contorno de curto circuito, os graus de liberdade relativos ao potencial elétrico são configurados como nulos para as superfícies X_1^{e-} e X_1^{e+} . A partir das condições da tabela 2 e das equações constitutivas (3), as constantes elásticas efetivas são calculadas como segue:

$$c_{pp}^E = \frac{\overline{\overline{T_p}}}{\overline{\overline{S_p}}} \quad p = 4, 5, 6 \quad (38)$$

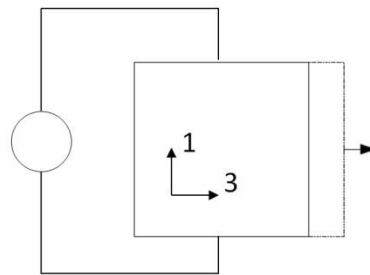


Figura 12 - Representação do problema local utilizado para calcular as constantes piezoelétricas e elétricas.

As constantes piezoelétricas e_{3p} e a permissividade dielétrica ϵ_{33}^S podem ser obtidas, através das condições de contorno do problema 7, listadas na tabela 2, em que todos os graus de liberdade de deslocamento das superfícies externas do RVE são configurados nulos e aplica-se uma diferença de potencial entre os eletrodos, como mostrado na figura 12. Desta forma:

$$e_{3p} = -\frac{\overline{\overline{T_p}}}{\overline{\overline{E_3}}} \quad p = 1, 2, 3 \quad (39)$$

$$\epsilon_{33}^S = \frac{\overline{\overline{D_3}}}{\overline{\overline{E_3}}} \quad (40)$$

Para se calcular as constantes de piezoeletricidade e de dieletricidade na forma “d”, d_{3p} e ϵ_{33}^T , um último problema local é implementado. Aplica-se uma diferença de potencial entre os eletrodos, e para aproximar a condição de tensão nula, não é feita nenhuma restrição às superfícies do RVE, apenas configuram-se os deslocamentos do ponto da origem em zero, para evitar o movimento de corpo rígido. As constantes são calculadas por:

$$d_{3p} = -\frac{\overline{S}_p}{\overline{E}_3} \quad p = 1, 2, 3 \quad (41)$$

$$\epsilon_{33}^T = \frac{\overline{D}_3}{\overline{E}_3} \quad (42)$$

Por fim, calculam-se os coeficientes de acoplamento eletromecânico entre o campo e deslocamento elétricos na direção x_3 e a tensão mecânica e a deformação normais, também, na direção x_3 , segunda as equação (41) e (42):

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \epsilon_{33}^T} \quad (43)$$

$$k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{s_{33}^E \epsilon_{33}^T}} \quad (44)$$

As equações (37), (38) e (39), utilizadas para calcular as propriedades equivalentes, são obtidas por uma simplificação que leva em conta que as três componentes de campo elétrico são nulas, nos problemas de 1 a 6. Como o objetivo delas é calcular as propriedades do compósito como um todo elas são uma boa aproximação, porém no modelo feito em ANSYS® são levadas em consideração a configuração real dos eletrodos e as condições equipotenciais resultantes, ou seja, essas componentes de campo nem sempre serão nulas e nos resultados será possível analisar com mais precisão o que realmente ocorre na prática. Desta forma, no modelo numérico cada problema local remete a equações como as listadas na tabela 3.

Tabela 3 - Equações completas dos problemas locais.

Problema	Equações		
1	$T_1 = c_{11}S_1 - e_{31}E_3$	$T_2 = c_{12}S_1 - e_{32}E_3$	$T_3 = c_{13}S_1 - e_{33}E_3$
2	$T_2 = c_{22}S_2 - e_{32}E_3$	$T_3 = c_{c23}S_2 - e_{33}E_3$	
3	$T_3 = c_{33}S_3 - e_{33}E_3$		
4	$T_4 = c_{44}S_4 - e_{24}E_2$		
5	$T_5 = c_{55}S_5 - e_{15}E_1$		

6	$T_6 = c_{66}S_6$			
7	$T_1 = -e_{31}E_3$	$T_2 = -e_{32}E_3$	$T_3 = -e_{33}E_3$	$D_3 = \epsilon_{33}E_3$
8	$S_1 = d_{31}E_3$	$S_2 = d_{32}E_3$	$S_3 = d_{33}E_3$	$D_3 = \epsilon_{33}E_3$

3.3. Cálculo numérico das propriedades efetivas do MFC d33

O elemento utilizado no modelo em ANSYS® é o sólido 3D de 20 nós de campos acoplados denominado "SOLID226". Neste caso, o campo acoplado é o piezoelétrico, que possui quatro graus de liberdade por nó: os três deslocamentos cartesianos (UX, UY e UZ) e o potencial elétrico (VOLT). No RVE do MFC d33 foram utilizados um total de 1408 elementos. Ele possui 8 divisões na direção x1, 11 na x2 e 16 na x3. Como já visto anteriormente, foram expostas na figura 9 as variáveis dimensionais do RVE que representa o transdutor piezocompósito MFC d33. A tabela 4, abaixo, mostra os valores destas variáveis utilizados neste trabalho. As propriedades mecânicas, piezoelétricas e dielétricas homogêneas dos materiais utilizados para a modelagem do RVE em questão são apresentadas na tabela 1.

Tabela 4 – Dimensões utilizadas na construção dos RVEs.

Eixo x1	Eixo x2	Eixo x3
$h_c = 18 \mu m$	$L_c = 0,5h_p$	$W_t = 2,25h_p$
$h_p = 180 \mu m$	$L_e = 5h_p$	$W_e = 0,5(1 - \rho)W_t$
$h_K = 40 \mu m$		$W_e = \rho W_t$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Realizados os procedimentos descritos no capítulo anterior, foram obtidos os seguintes resultados:

- Distribuições dos valores das variáveis relevantes de cada problema local resultantes das condições de contorno impostas nos cálculos de homogeneização periódica em elementos finitos, tendo como modelo a camada ativa do MFC d33 e a configuração de 86% de fração volumétrica de fibra.

- Distribuições dos valores das variáveis relevantes de cada problema local resultantes das condições de contorno impostas nos cálculos de homogeneização periódica em elementos finitos, tendo como modelo o MFC d33 completo e a configuração de 86% de fração volumétrica de fibra.

- Comportamentos das propriedades mecânicas, piezoelétricas e dielétricas do MFC d33 como função da fração volumétrica de fibra, avaliados no método das regras de mistura e comparados com os da homogeneização periódica em elementos finitos.

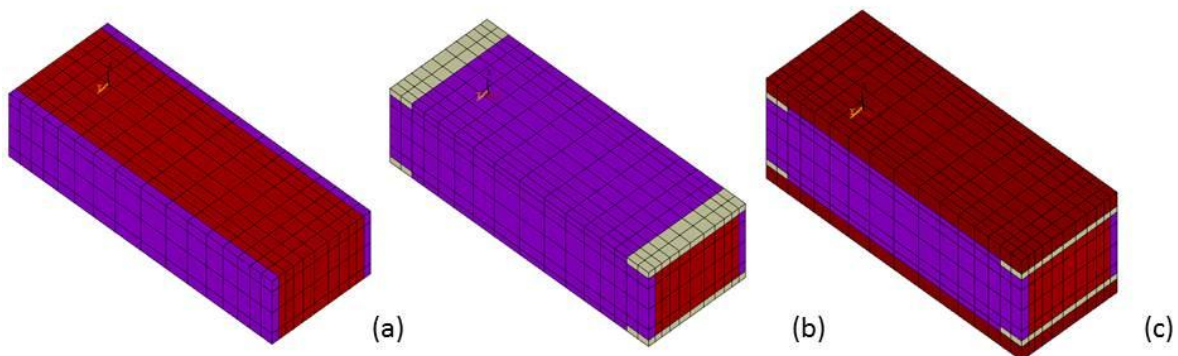


Figura 13 - Malha dos elementos finitos do RVE para o MFC d33 com (a) uma camada (b) três camadas e (c) cinco camadas.

A figura 13 mostra as malhas dos elementos finitos, criadas em ANSYS®, dos modelos de RVE de camada ativa, figura 13 (a), camada ativa + eletrodo, figura 13 (b), e MFC d33, figura 13 (c), utilizando uma FVF de 0,86.

4.1. Propriedades efetivas da camada ativa

As distribuições dos valores de tensão mecânica, deformação, deslocamento elétrico e campo elétrico relevantes de cada problema local, da tabela 2, resultantes das condições de contorno impostas nos cálculos de homogeneização periódica em elementos finitos, tendo como modelo a camada ativa do MFC d33 e a configuração de 86% de fração volumétrica

de fibra, estão mostradas nas figuras de 14 a 21, seguidas de uma análise desses resultados.

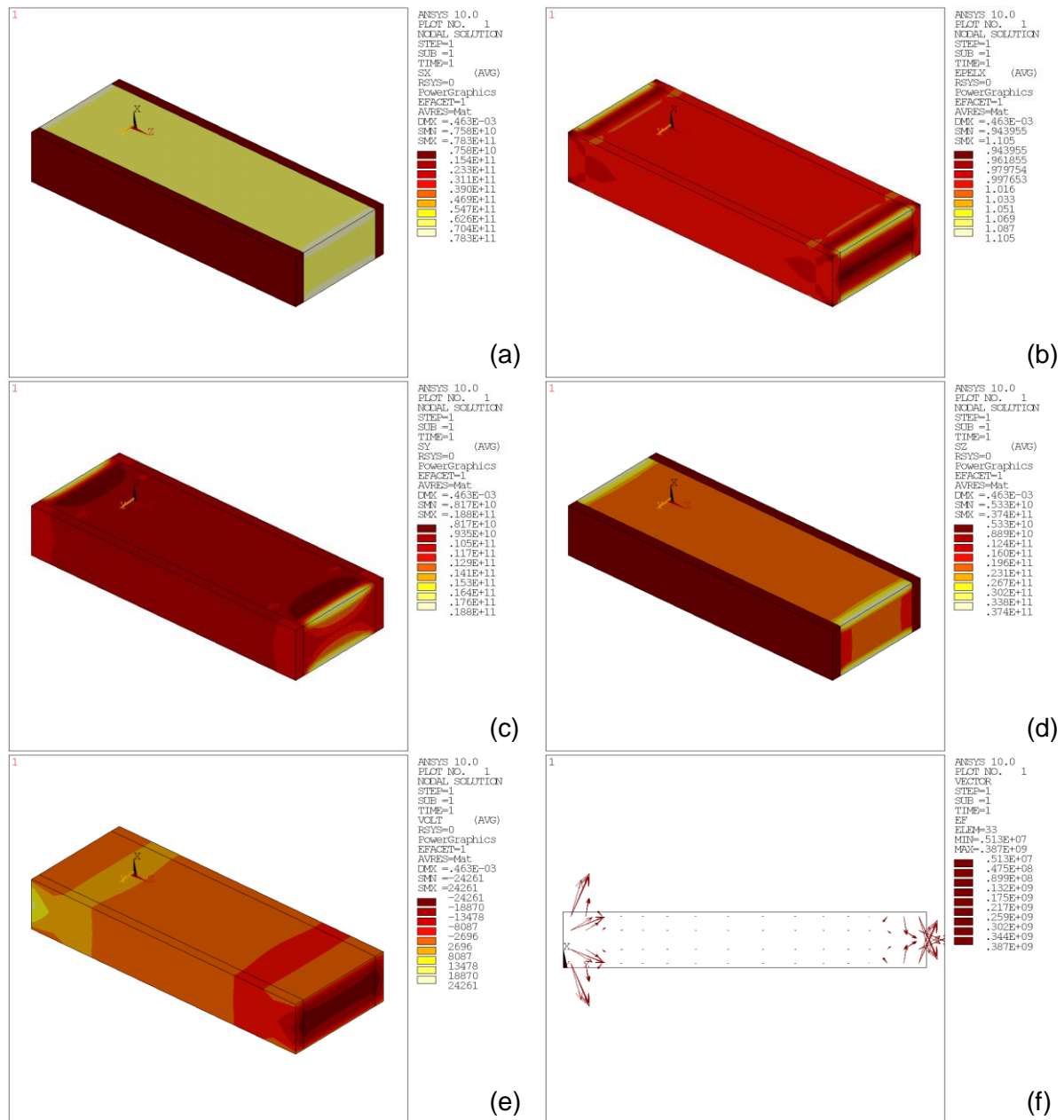


Figura 14 - Distribuição induzida por deformação normal unitária S_1 aplicada ao RVE da camada ativa do MFC d33: (a) da tensão mecânica normal T_1 , (b) da deformação normal S_1 , (c) da tensão mecânica normal T_2 , (d) da tensão mecânica normal T_3 , (e) do potencial elétrico e (f) dos vetores de campo elétrico.

Como esperado, nos problemas locais 1 e 3, a tensão mecânica está concentrada na fibra piezoelétrica, e as deformações são quase homogêneas pelo RVE. Por outro lado, no problema 2, a tensão está relativamente bem distribuída pelo RVE, enquanto que a deformação é bem maior no material epóxi do que na fibra. A deformação é, também, predominante na resina epóxi nos problemas locais relacionados à constante elástica de cisalhamento nos planos yz , c_{44}^E , e xy , c_{66}^E . Ao contrário disto, no problema local número 5,

para o cálculo do coeficiente c_{55}^E , a deformação é homogênea na direção y e possui valores maiores nas regiões abaixo dos eletrodos em relação às demais regiões, ao passo que a tensão se concentra na fibra piezoelétrica.

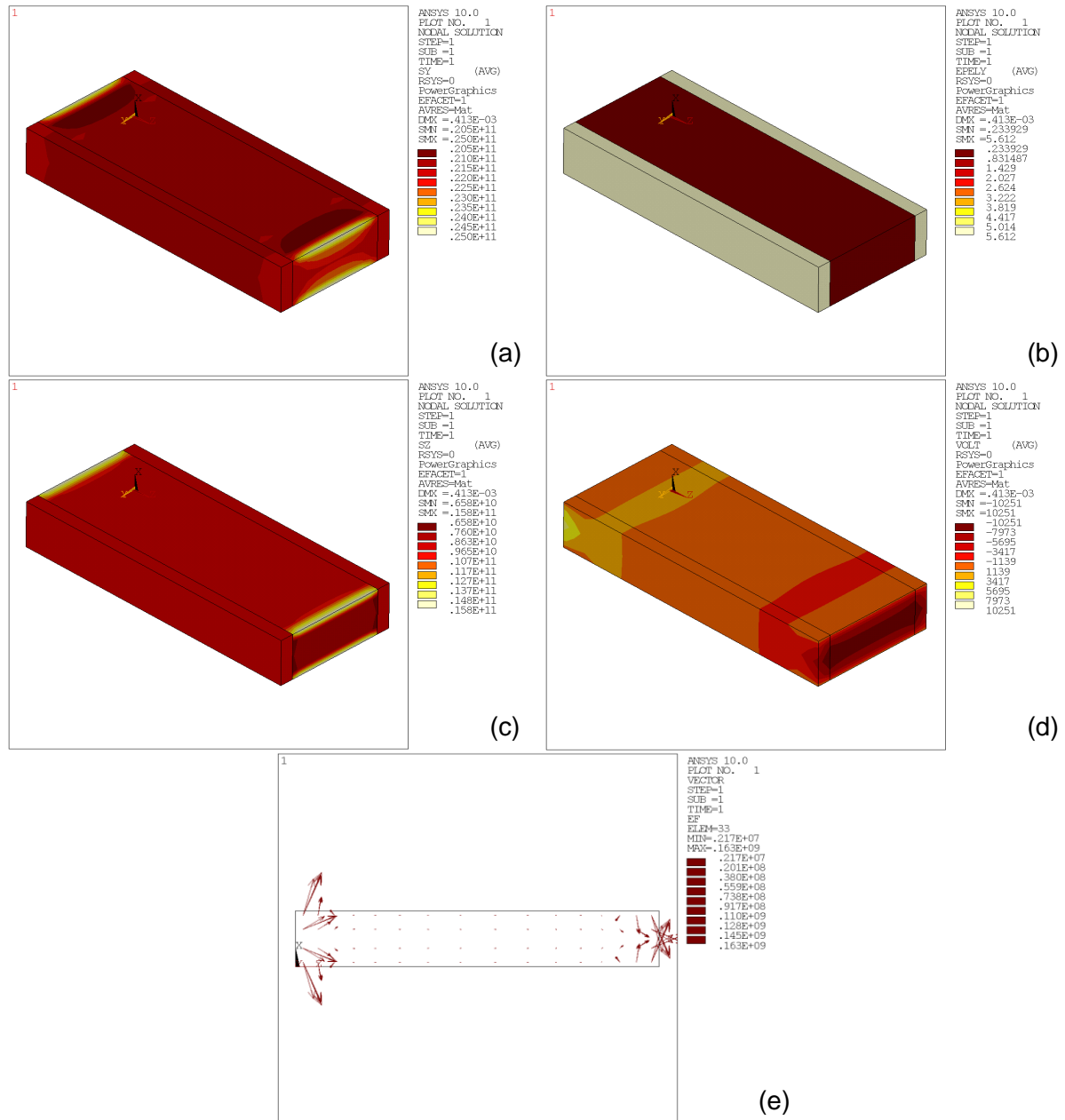


Figura 15 - Distribuição induzida por deformação normal unitária S_2 aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33: (a) da tensão mecânica normal T_2 , (b) da deformação normal S_2 , (c) da tensão mecânica normal T_3 , (d) do potencial elétrico e (e) dos vetores de campo elétrico.

Nota-se que algumas variáveis não são homogêneas ao longo do RVE, a exemplo das deformações apresentadas nas figuras 14(b) e 16(b) e da tensão em 15(a). O fato de as fibras terem suas propriedades mecânicas alteradas de acordo com a intensidade e a direção do campo elétrico induzido e o fato de os eletrodos serem curto circuitados ($V = 0$,

nos problemas de 1 a 6), a distribuição do potencial elétrico não é homogênea ao longo do RVE. Essa heterogeneidade é responsável pelas variações de propriedade que ocorrem principalmente nas regiões próximas aos eletrodos.

Através da tabela 3, é fácil ver a dependência que uma variável tem em relação às outras e explicar o motivo das heterogeneidades encontradas nos resultados. Observando, por exemplo, a figura 15 e a equação $T_2 = c_{22}S_2 - e_{32}E_3$, retirada da tabela 3, vê-se que a região onde o campo elétrico varia, figura 15(e), e a região onde a tensão mecânica varia, figura 15(a), são as mesmas, evidenciando a origem desta não homogeneidade. Outro exemplo, que demonstra isto, é o problema de número 6. Pela equação da tabela 3, a tensão T_6 depende apenas do módulo de cisalhamento do material c_{66} e da deformação atuante S_6 , que neste caso são constantes. Isto pode ser visto comparando-se as figuras de número 19, em que as variações de campo elétrico, figura 19(e), ao longo do RVE não influenciam nos valores da tensão mecânica em questão, figura 19(a). Para os problemas 2 e 4, figuras 15 e 17, em que a deformação se concentra na resina epóxi, o efeito da heterogeneidade do potencial elétrico para essa propriedade é desprezível, já que a deformação devido à diferença de rigidez entre os materiais assume valores relativamente maiores. Nota-se, também, que em todos os problemas a direção do campo elétrico é predominante na direção indicada pelas equações da tabela 3.

As distribuições das tensões mecânicas, do deslocamento elétrico e do campo elétrico utilizados para calcular as propriedades piezoelétricas e dielétricas do RVE na forma “e”, com FVF de 0,86, estão apresentadas na figura 20. E as distribuições das deformações, do deslocamento elétrico e do campo elétrico para a forma “d”, se apresentam na figura 21. Nelas não ocorre mais a heterogeneidade do potencial elétrico, porém devido aos eletrodos serem interdigitados, o campo elétrico formado apresenta linhas curvilíneas no plano XZ. A região entre os eletrodos superiores e inferiores, logo abaixo deles, é a mais afetada por esse efeito. Quanto mais próxima do eletrodo a componente do campo tende a se inclinar, saindo do eixo x_3 , alcançando o eixo x_1 , como na figura 20(g) e 21(g). Esta mudança de direção reduz o valor da componente longitudinal do campo, o que acaba refletindo no valor das variáveis de tensão mecânica, deformação e deslocamento elétrico de cada problema, na região citada, já que dependem diretamente deste valor, segundo a tabela 3 (problemas 7 e 8).

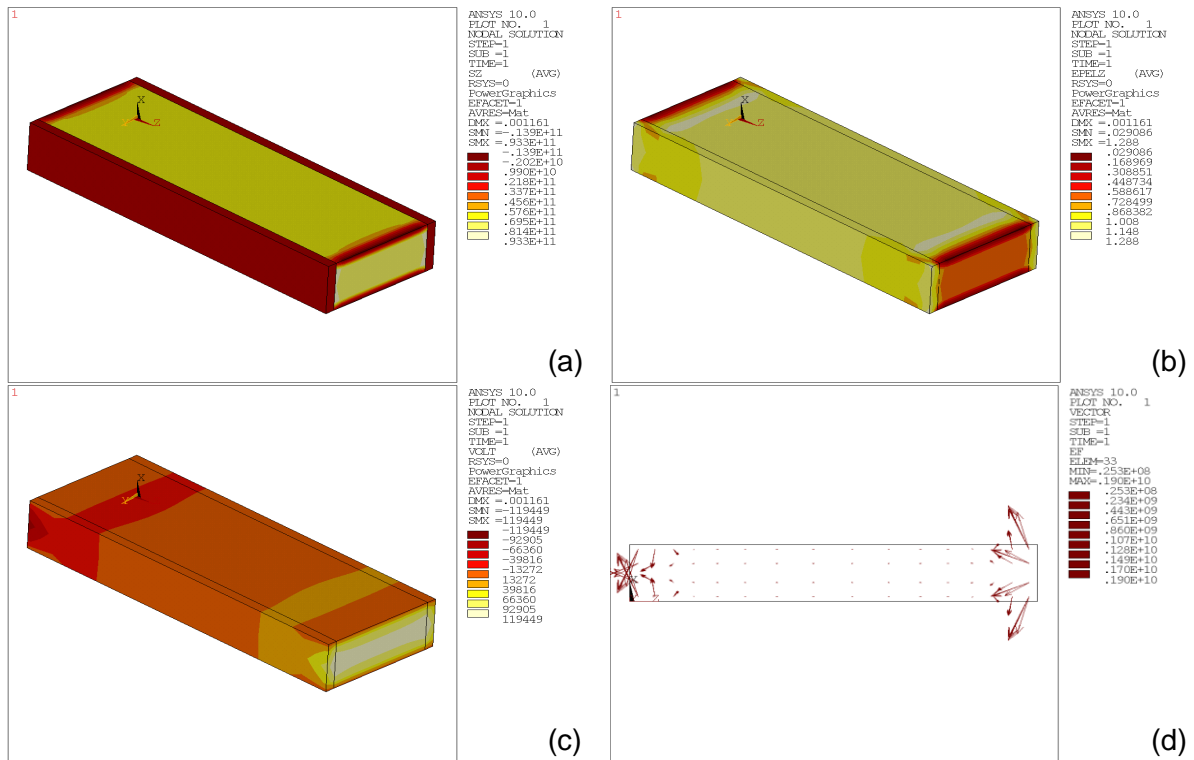


Figura 16 - Distribuição induzida por deformação normal unitária S_3 aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33: (a) da tensão mecânica normal T_3 , (b) da deformação normal S_3 , (c) do potencial elétrico e (d) dos vetores de campo elétrico.

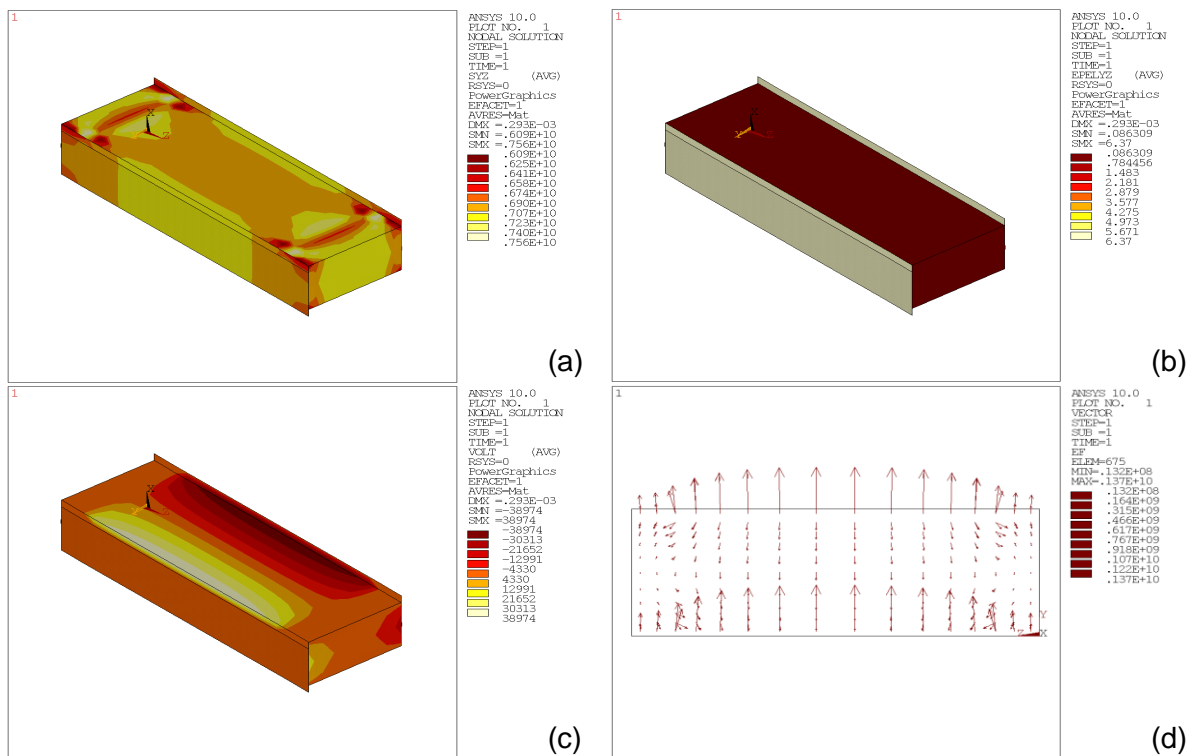


Figura 17 - Distribuição induzida por deformação cisalhante unitária S_4 aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33: (a) da tensão mecânica cisalhante T_4 e (b) da deformação cisalhante S_4 , (c) do potencial elétrico e (d) dos vetores de campo elétrico.

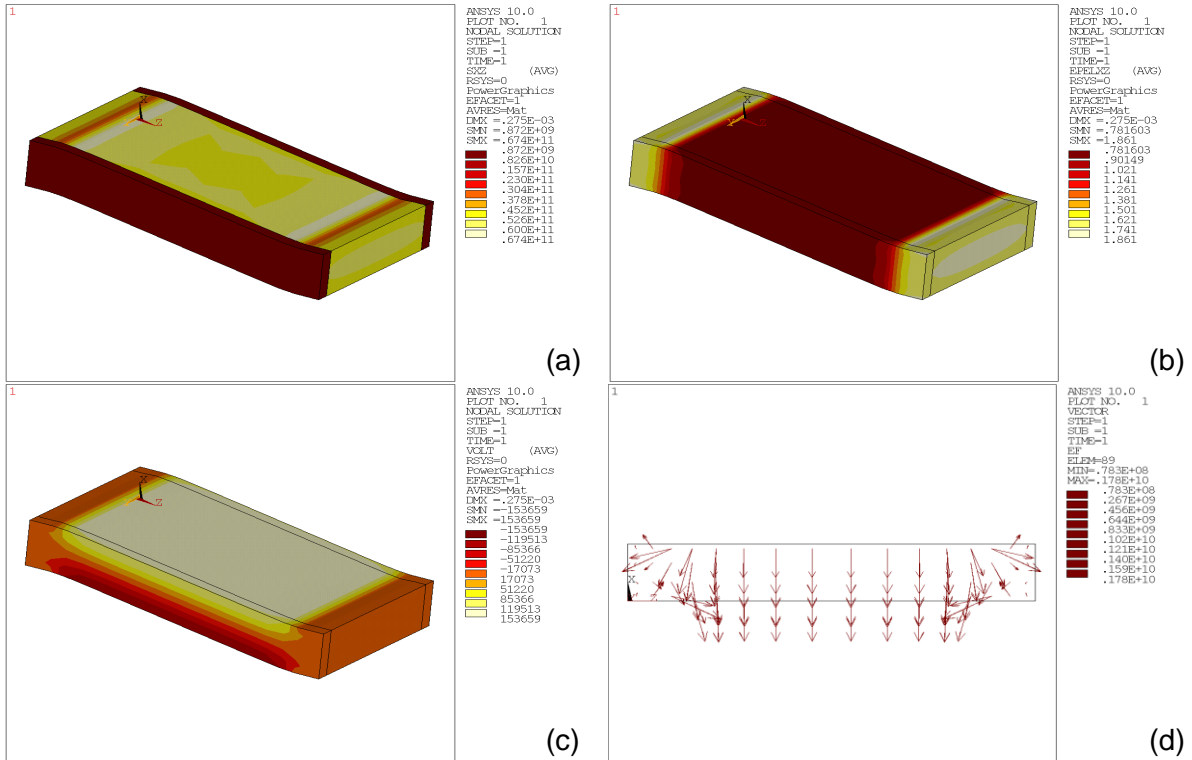


Figura 18 - Distribuição induzida por deformação cisalhante unitária S_5 aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33: (a) da tensão mecânica cisalhante T_5 , (b) da deformação cisalhante S_5 e (c) do potencial elétrico e (d) dos vetores de campo elétrico.

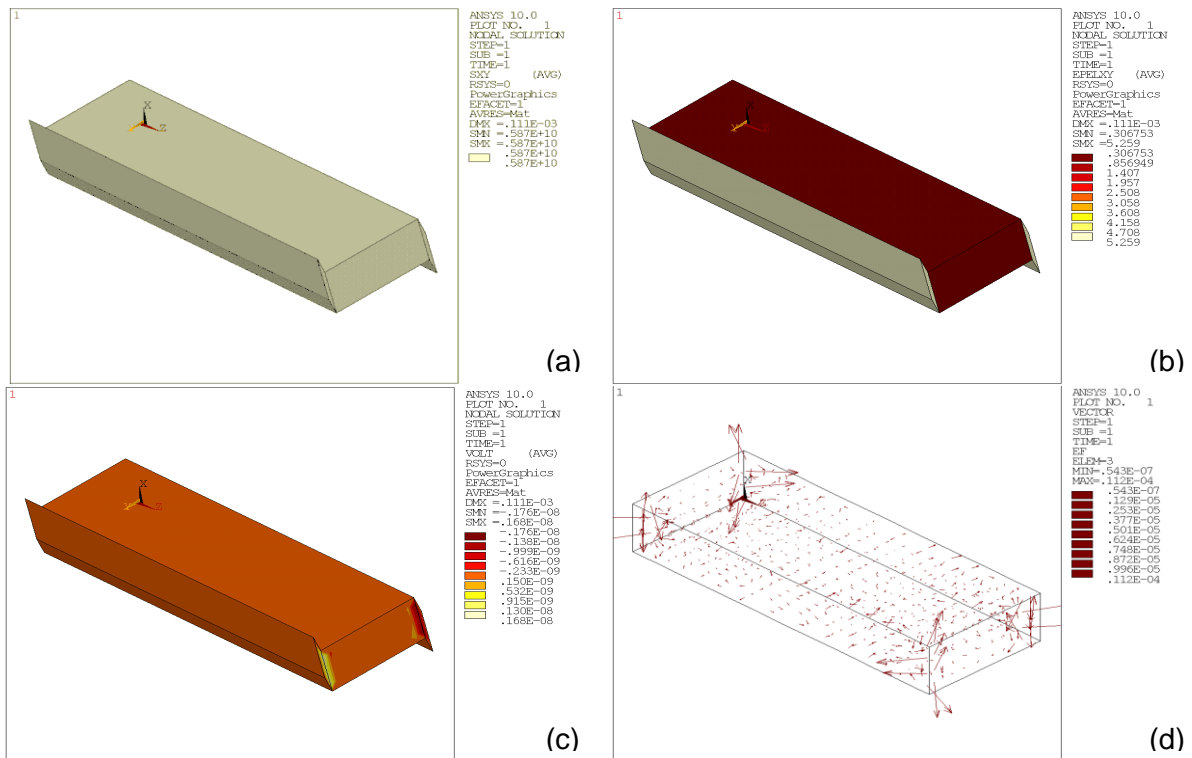


Figura 19 - Distribuição induzida por deformação cisalhante unitária S_6 aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33: (a) da tensão mecânica cisalhante T_6 e (b) da deformação cisalhante S_6 e (c) do potencial elétrico e (d) dos vetores de campo elétrico.

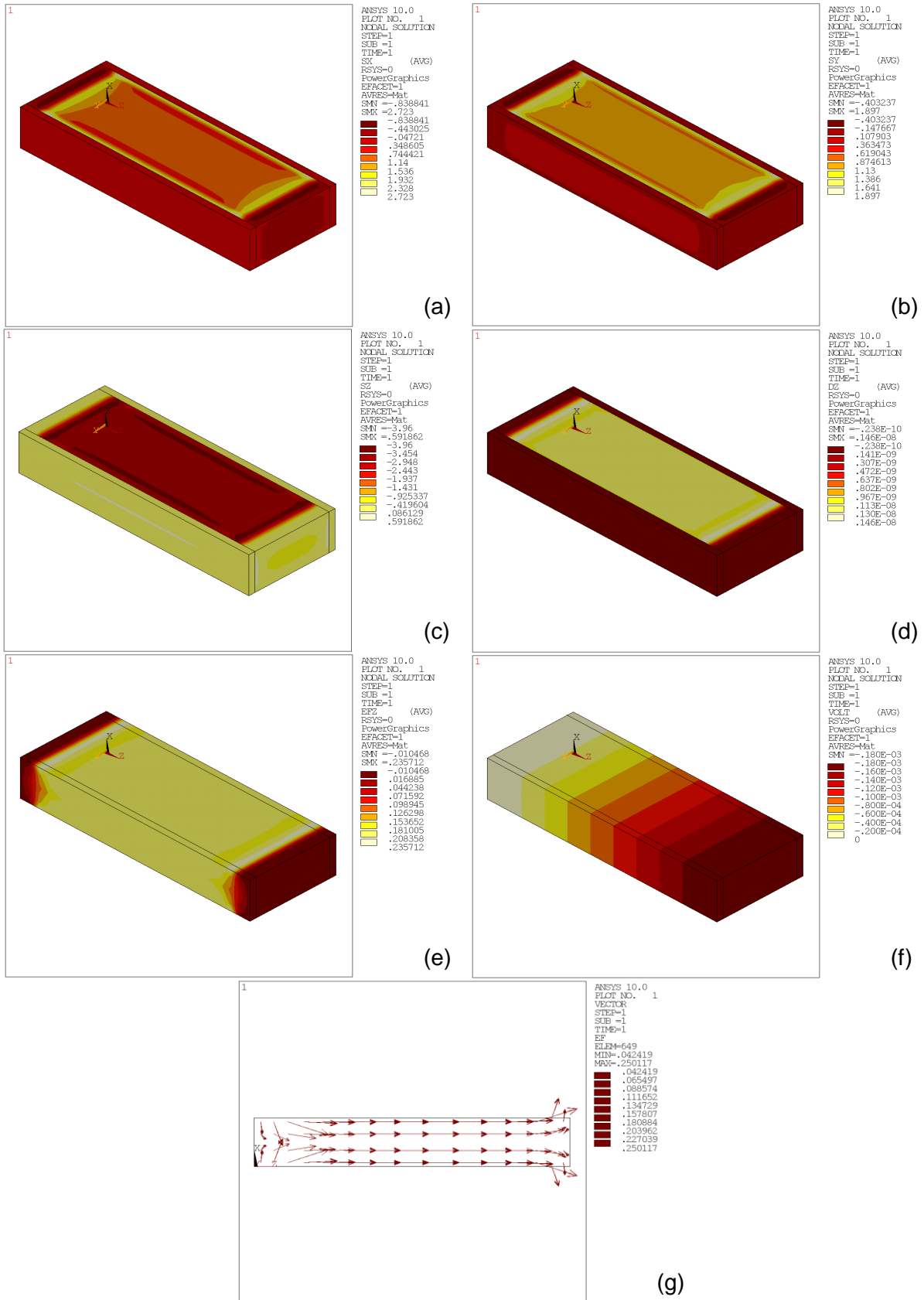


Figura 20 - Distribuição induzida por diferença de potencial aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33, livre de deformações: (a) da tensão normal T_1 , (b) da tensão normal T_2 , (c) da tensão normal T_3 , (d) do deslocamento elétrico D_3 , (e) do campo elétrico E_3 , (f) do potencial elétrico e (g) dos vetores de campo elétrico.

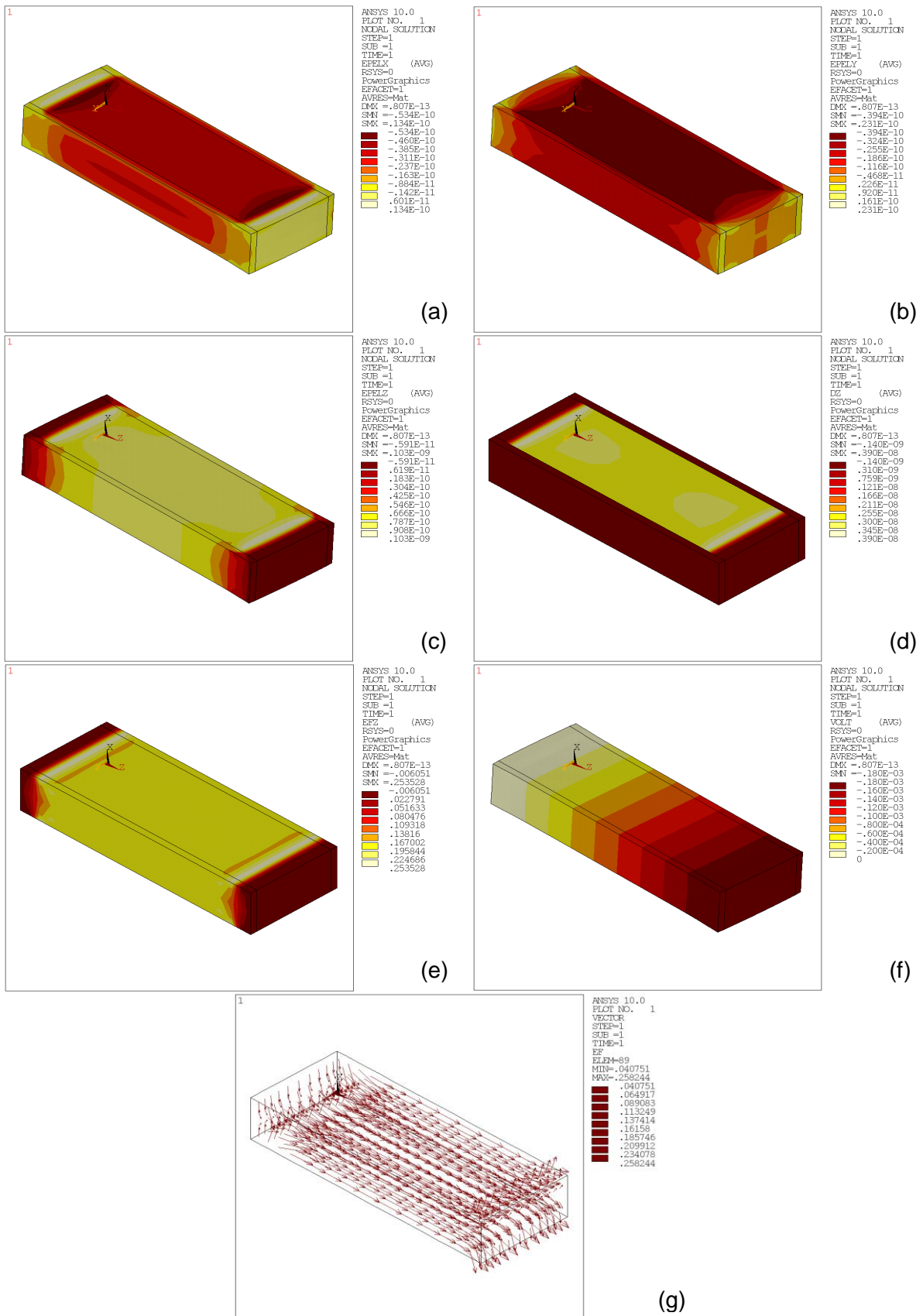


Figura 21 - Distribuição induzida por diferença de potencial aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33, livre de deformações: (a) da deformação normal S_1 , (b) da deformação normal S_2 , (c) da deformação normal S_3 , (d) do deslocamento elétrico D_3 , (e) do campo elétrico E_3 , (f) do potencial elétrico e (g) dos vetores de campo elétrico.

4.2. Propriedades efetivas do MFC d33

As distribuições dos valores de tensão mecânica, deformação, deslocamento elétrico e campo elétrico relevantes de cada problema local, da tabela 2, resultantes das condições de contorno impostas nos cálculos de homogeneização periódica em elementos finitos, tendo como modelo o MFC d33 completo e a configuração de 86% de fração volumétrica de fibra, estão mostradas nas figuras de 22 a 29, seguidas de uma análise desses resultados.

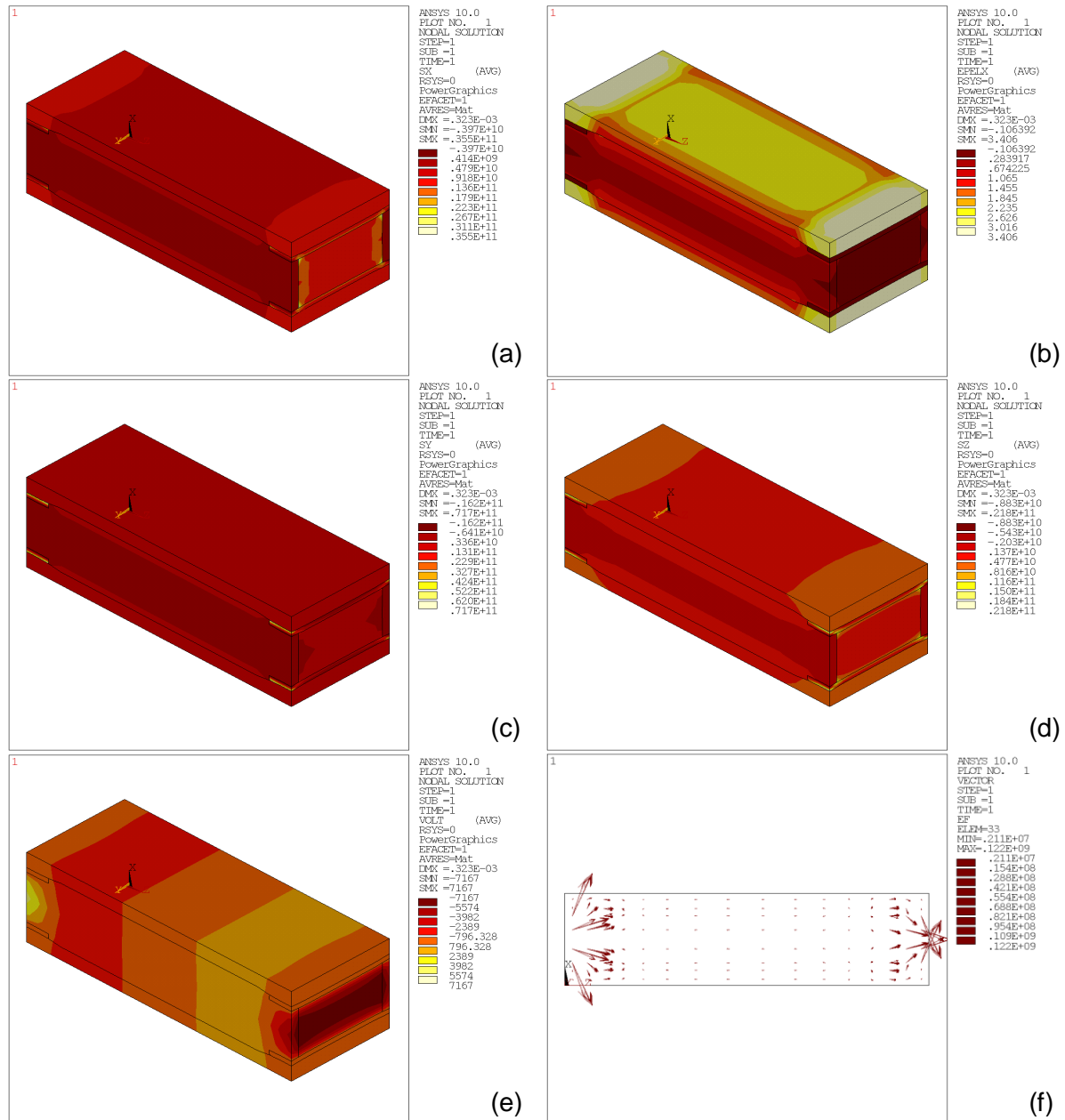


Figura 22 - Distribuição induzida por deformação normal unitária S_1 aplicada ao RVE da camada ativa do MFC d33: (a) da tensão mecânica normal T_1 , (b) da deformação normal S_1 , (c) da tensão mecânica normal T_2 , (d) da tensão mecânica normal T_3 , (e) do potencial elétrico e (f) dos vetores de campo elétrico.

Assim como no modelo numérico da camada ativa, o campo elétrico no modelo do MFC d33 apresenta a mesma característica para os respectivos problemas. Eles são mostrados nas últimas imagens das figuras de 22 a 29. A heterogeneidade do potencial elétrico também se apresenta de forma similar às do modelo anterior e estão apresentadas nas penúltimas imagens do mesmo intervalo de figuras.

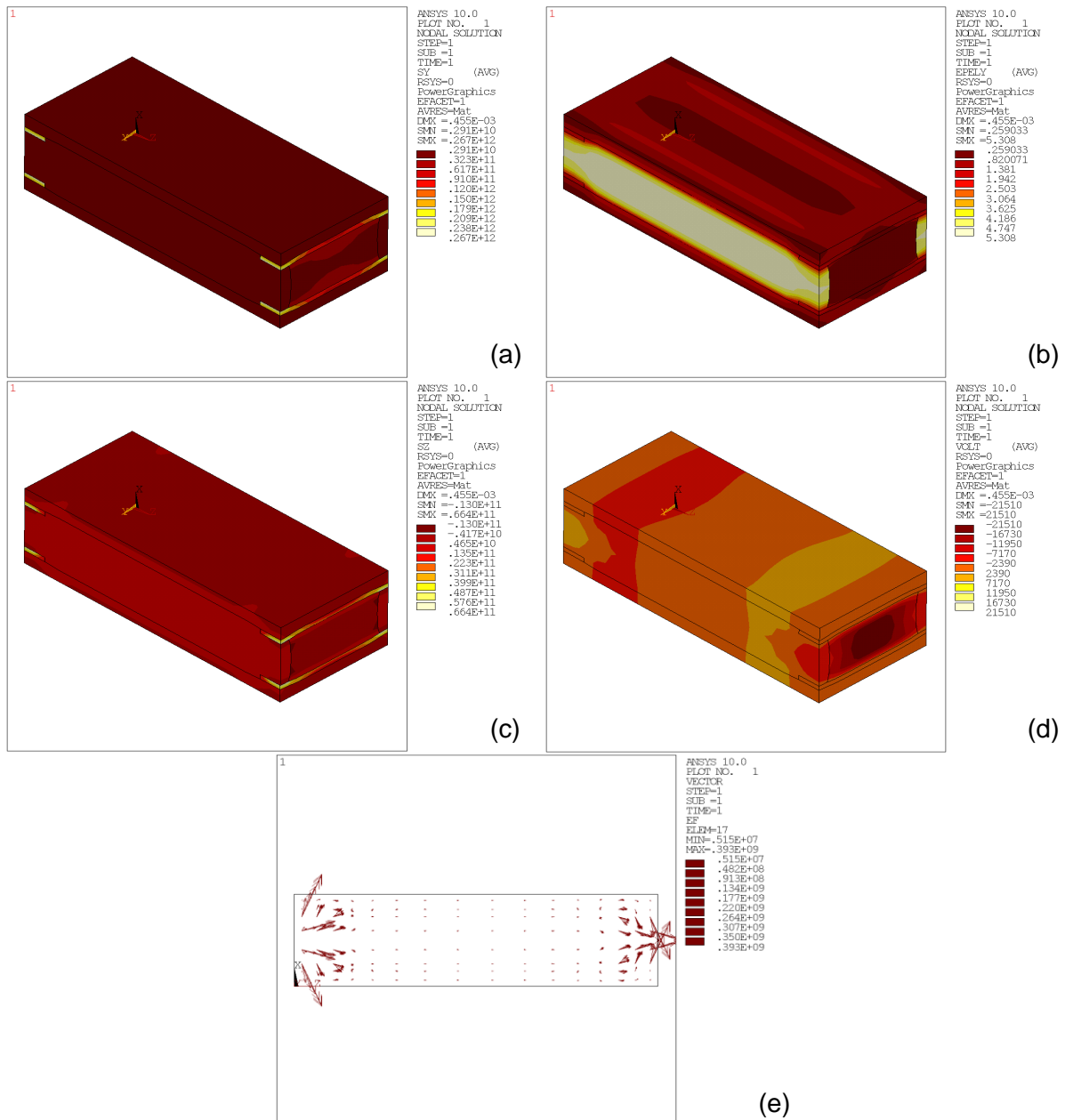


Figura 23 - Distribuição induzida por deformação normal unitária S_2 aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33: (a) da tensão mecânica normal T_2 , (b) da deformação normal S_2 , (c) da tensão mecânica normal T_3 , (d) do potencial elétrico e (e) dos vetores de campo elétrico.

Como se pode notar, na figura 22(b), ao contrário do que ocorre no modelo da camada ativa, as deformações normais S_1 são concentradas na camada de kapton. Portanto, apenas as deformações normais S_3 , figura 24(b), são homogêneas (na região não afetada pela heterogeneidade do campo elétrico). Ainda no problema 3, vê-se que a tensão se concentra tanto nas fibras como nos eletrodos, figura 24(a), e no problema 1 as tensões estão bem distribuídas pelo RVE, sendo que é relativamente menor para o material epóxi. Nas figuras 23(a) e 25(a), dos problemas 2 e 4, é possível ver que os eletrodos possuem maior rigidez relativa, e portanto, apresentam valores maiores de tensão mecânica, em relação aos outros materiais. Nestes mesmos problemas, a deformação ainda se concentra no epóxi, porém não é mais tão homogênea como no modelo anterior, devido às novas camadas de eletrodos e de kapton, figura 23(b) e figura 25(b). As deformações cisalhantes dos problemas 5 e 6 não são mais homogêneas e estão concentradas na camada de kapton. Nota-se, no geral, que as camadas de eletrodos e de kapton contribuem para a distribuição não homogênea das variáveis mecânicas e elétricas do RVE.

As distribuições das tensões mecânicas, do deslocamento elétrico e do campo elétrico utilizados para calcular as propriedades piezoelétricas e dielétricas do RVE na forma “e”, com FVF de 0,86, estão apresentadas na figura 28. E as distribuições das deformações, do deslocamento elétrico e do campo elétrico para a forma “d”, se apresentam na figura 29. Nota-se que os deslocamentos elétricos, figuras 28(d) e 29(d), ocorrem apenas no material piezoelétrico e que nas regiões próximas aos eletrodos há heterogeneidade devido à interdigitação dos eletrodos, como já explicado no modelo anterior, assim como ocorre para as demais propriedades dos problemas de número 7 e 8. As imagens das figuras 28 e 29 mostram que tanto as tensões mecânicas, quanto as deformações, também ocorrem somente no material piezoelétrico, sendo que as demais camadas apenas seguem o deslocamento imposto pelas fibras. Na figura 28, nota-se que os valores de tensão para os eletrodos são bem maiores que os valores apresentados pela fibra. Isto se deve a diferença de rigidez existente entre esses materiais, em que a do cobre é cerca de duas vezes maior que a do SONOX P502.

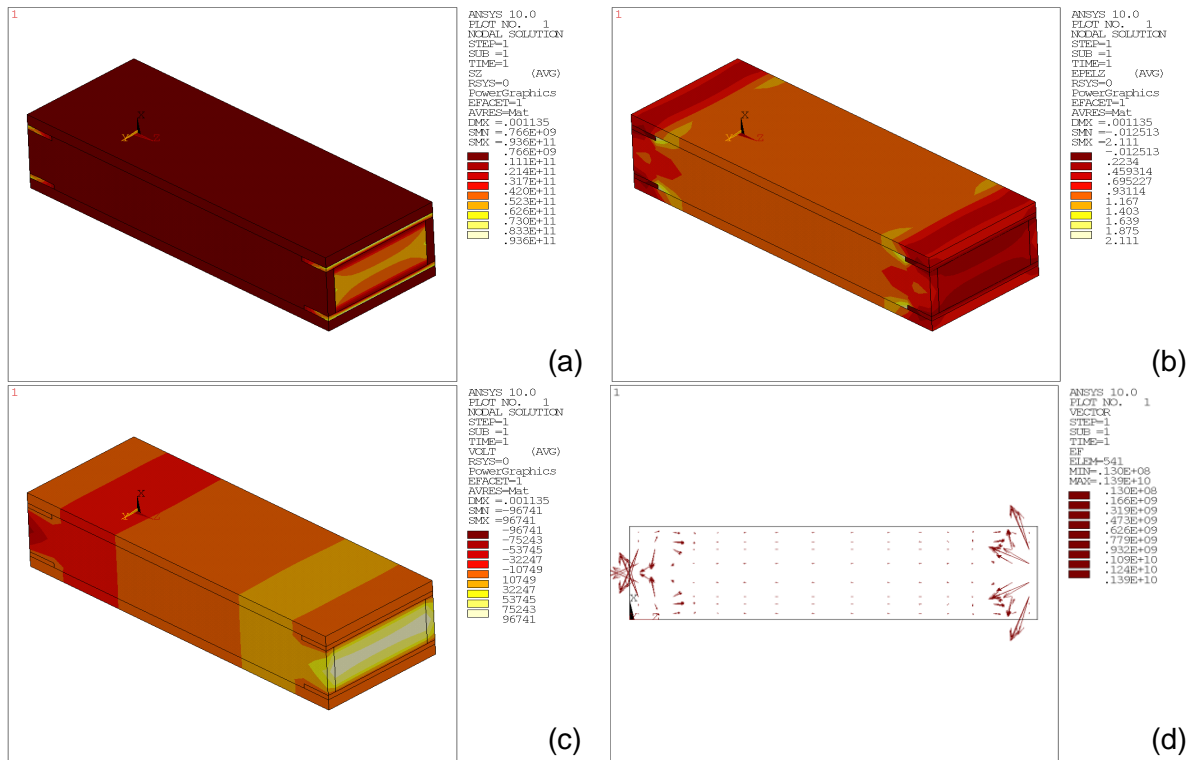


Figura 24 - Distribuição induzida por deformação normal unitária S_3 aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33: (a) da tensão mecânica normal T_3 , (b) da deformação normal S_3 , (c) do potencial elétrico e (d) dos vetores de campo elétrico.

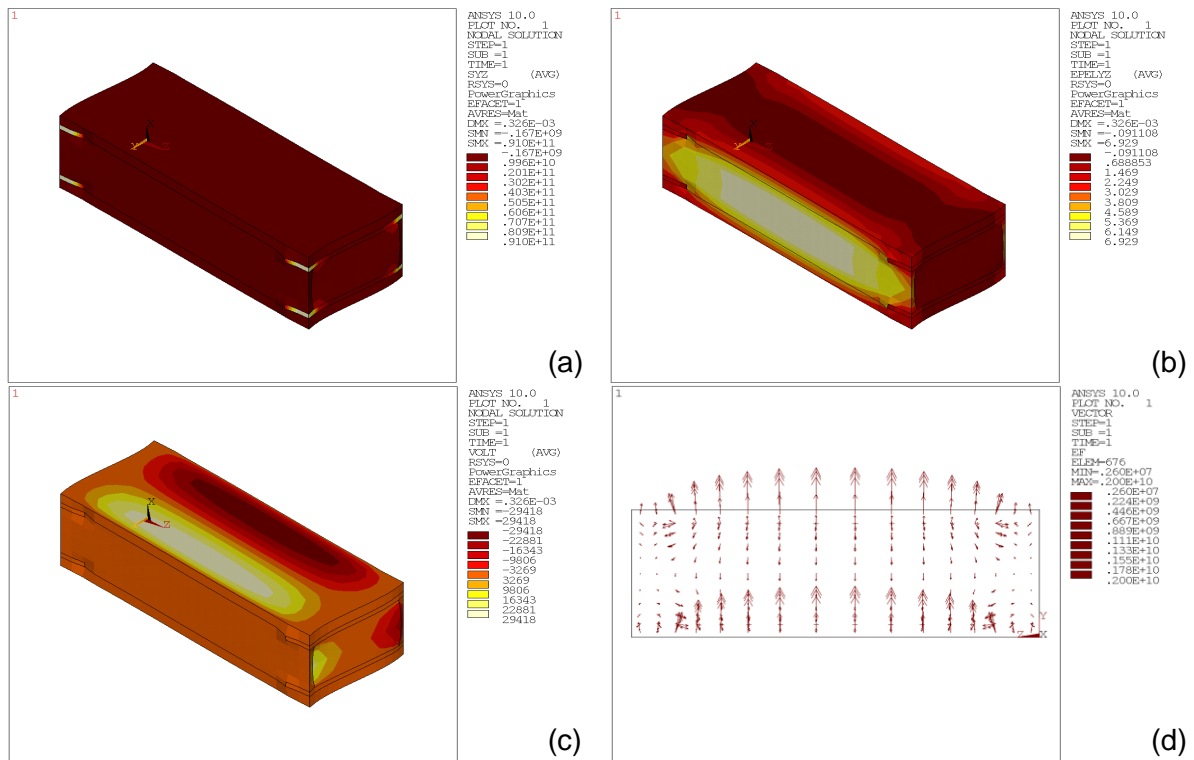


Figura 25 - Distribuição induzida por deformação cisalhante unitária S_4 aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33: (a) da tensão mecânica cisalhante T_4 e (b) da deformação cisalhante S_4 , (c) do potencial elétrico e (d) dos vetores de campo elétrico.

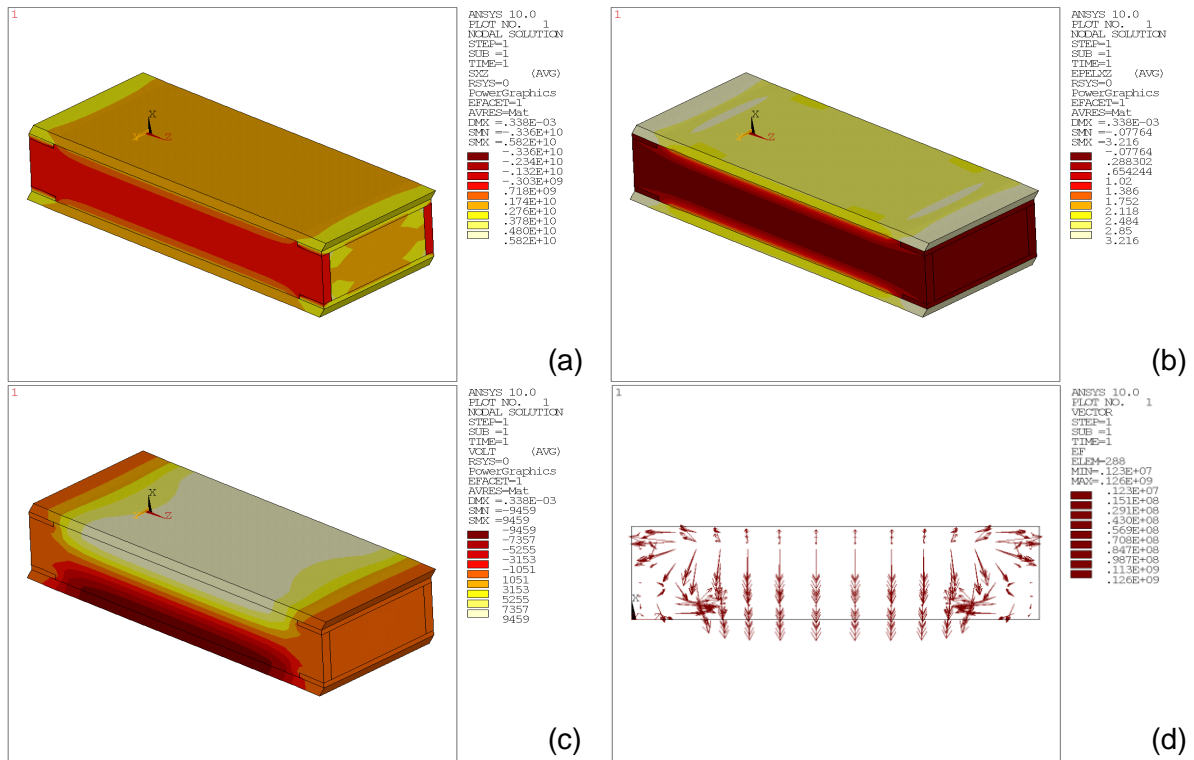


Figura 26 - Distribuição induzida por deformação cisalhante unitária S_5 aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33: (a) da tensão mecânica cisalhante T_5 , (b) da deformação cisalhante S_5 e (c) do potencial elétrico e (d) dos vetores de campo elétrico.

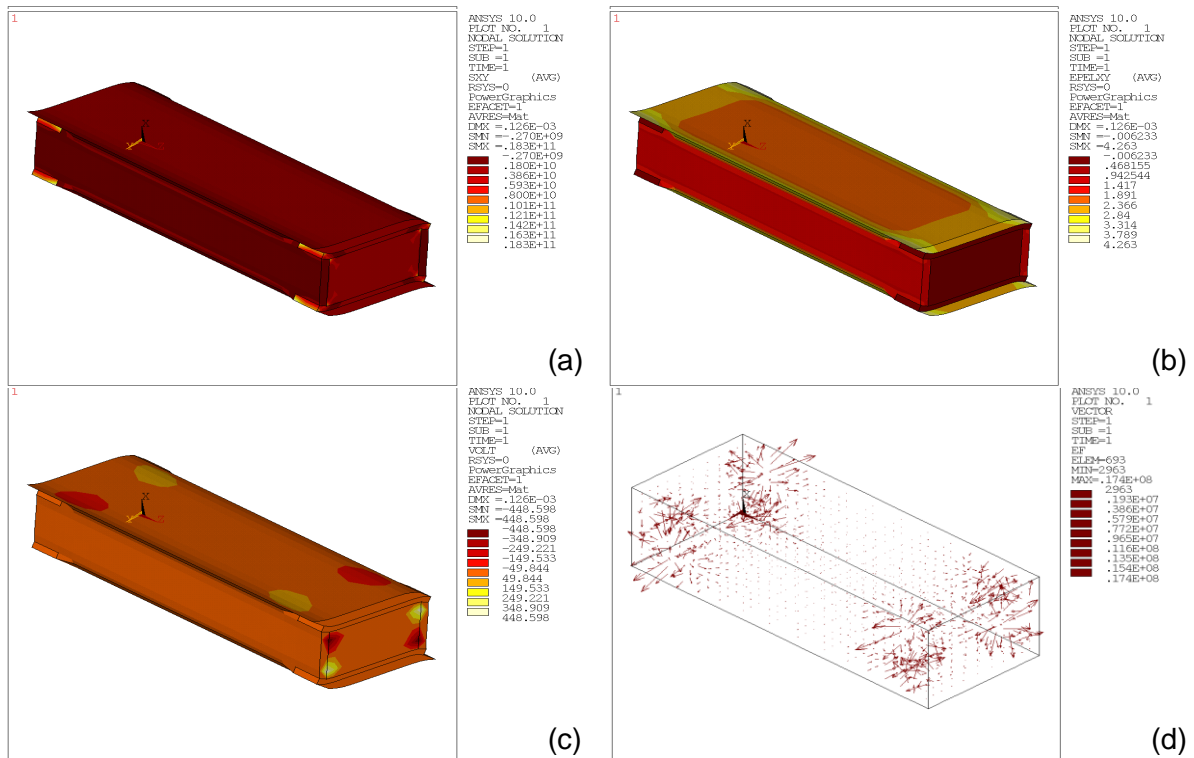


Figura 27 - Distribuição induzida por deformação cisalhante unitária S_6 aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33: (a) da tensão mecânica cisalhante T_6 e (b) da deformação cisalhante S_6 e (c) do potencial elétrico e (d) dos vetores de campo elétrico.

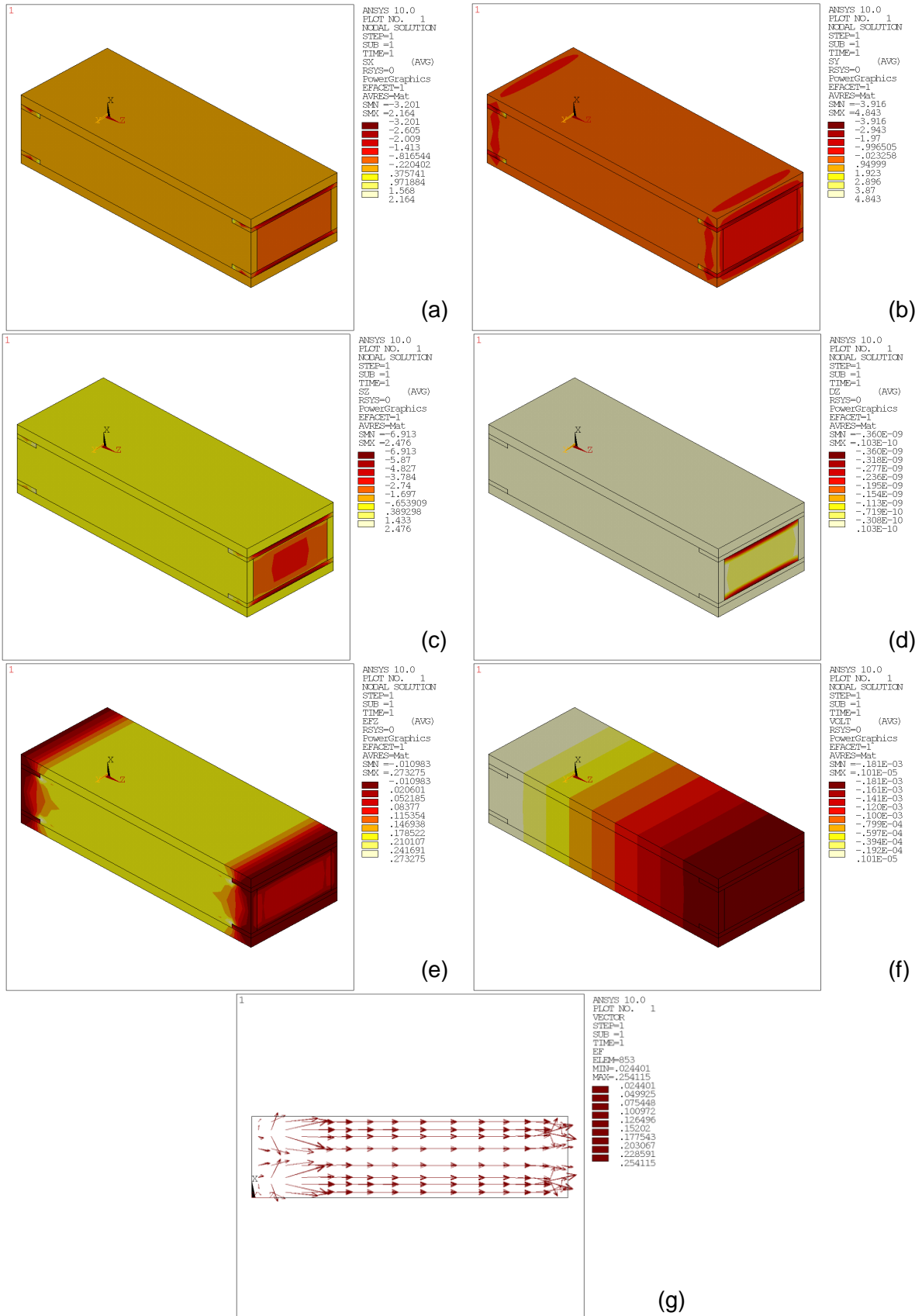


Figura 28 - Distribuição induzida por diferença de potencial aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33, livre de deformações: (a) da tensão normal T_1 , (b) da tensão normal T_2 , (c) da tensão normal T_3 , (d) do deslocamento elétrico D_3 , (e) do campo elétrico E_3 , (f) do potencial elétrico e (g) dos vetores de campo elétrico.

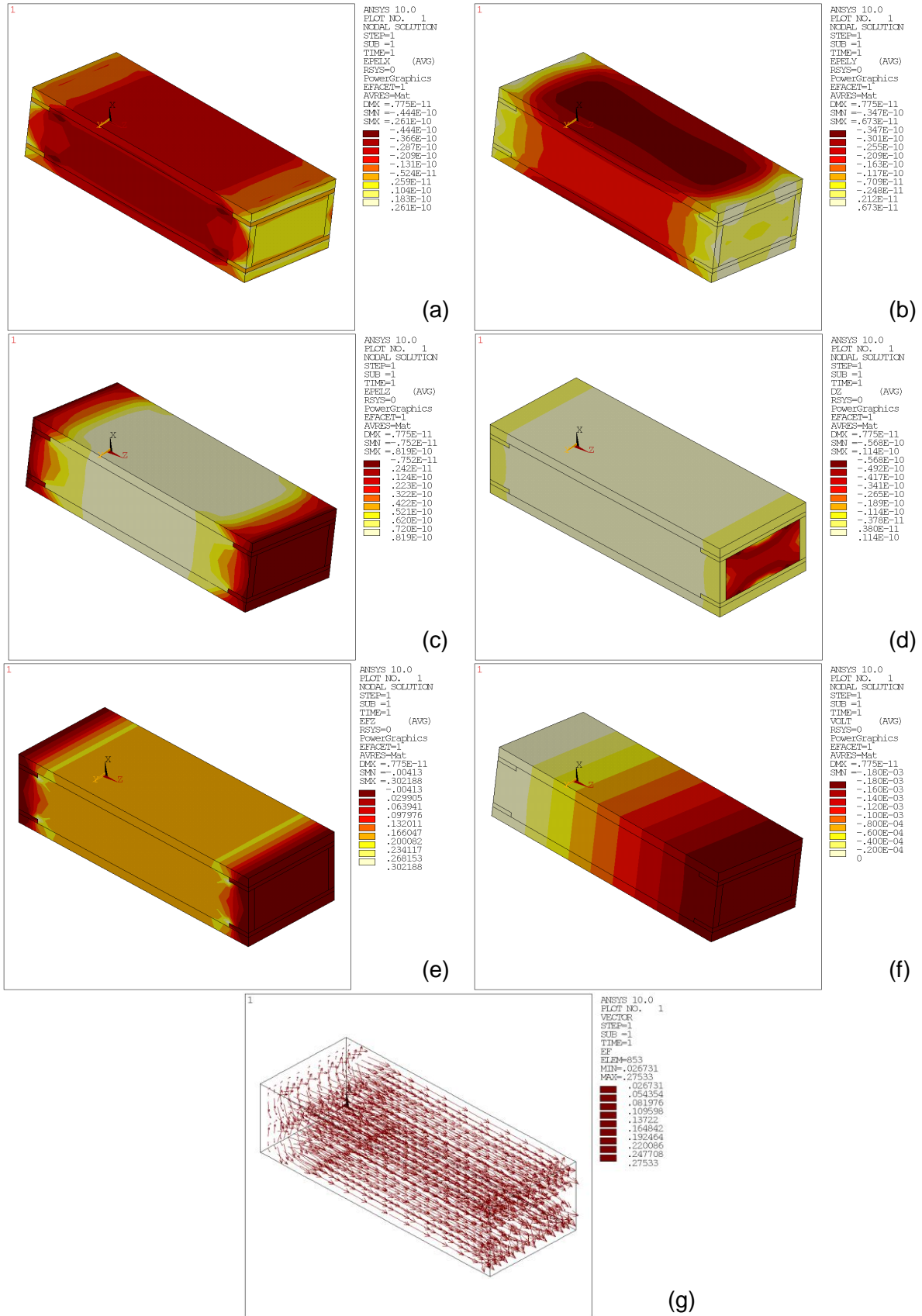


Figura 29 - Distribuição induzida por diferença de potencial aplicada ao RVE de uma camada do MFC d33, livre de deformações: (a) da deformação normal S_1 , (b) da deformação normal S_2 , (c) da deformação normal S_3 , (d) do deslocamento elétrico D_3 , (e) do campo elétrico E_3 , (f) do potencial elétrico e (g) dos vetores de campo elétrico.

4.3. Comparação entre os resultados numéricos e o analítico

As evoluções das diferentes propriedades mecânicas, piezoelétricas e dielétricas, bem como as dos coeficientes de acoplamento eletromecânico, em função da FVF estão representadas nas figuras 30, 31 e 32, em que são confrontados os dados obtidos por meio do método das regras de mistura, para o modelo da camada ativa, e os dados obtidos pelo método da homogeneização periódica em elementos finitos, para os modelos: da camada ativa, da camada ativa + eletrodos e do MFC d33 completo.

Comparando-se as curvas das regras de mistura com os pontos obtidos numericamente para a camada ativa, observa-se uma correlação relativamente boa entre os dados, tanto para as propriedades mecânicas, quanto piezoelétricas, quanto dielétricas. Algumas propriedades apresentam flutuações dos resultados numéricos em torno das curvas analíticas. Isto se deve principalmente pela presença da heterogeneidade do potencial elétrico gerado em decorrência dos eletrodos curto circuitados e estarem dispostos interdigitados, efeito este que já foi explicado aqui anteriormente.

As camadas protetoras de kapton são importantes porque fornecem a flexibilidade necessária para o transdutor, porém, analisando os gráficos das figuras citadas, é possível perceber também que essas camadas reduzem o desempenho do mesmo. Na figura 30, nas imagens de (c) a (g), nota-se que conforme essas camadas são adicionadas as constantes de rigidez homogêneas do transdutor decaem, ou seja, o transdutor se torna mais flexível nas respectivas direções. Ao mesmo tempo, analisando as figuras 31(f) e 31(g), é evidente a queda nos valores das propriedades piezoelétricas e dielétricas de interesse. Esta análise pode ser feita também, através das figuras 32(a) e 32(b), que mostra a evolução de k_{33}^2 e k_{33} .

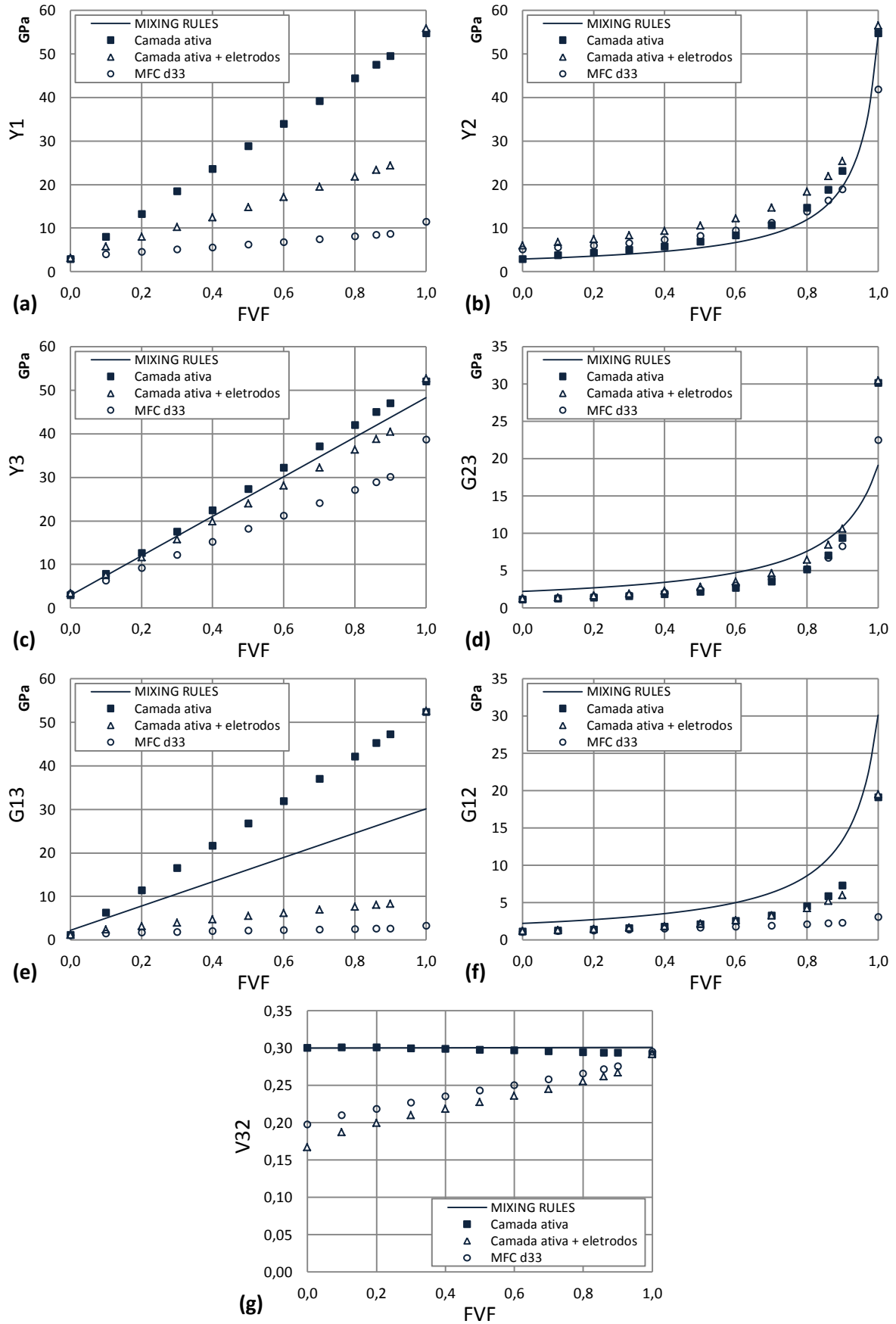


Figura 30 - Evolução das propriedades mecânicas do MFC d33 em função do FVF: comparação entre as regras de mistura e a técnica de homogeneização periódica em elementos finitos.

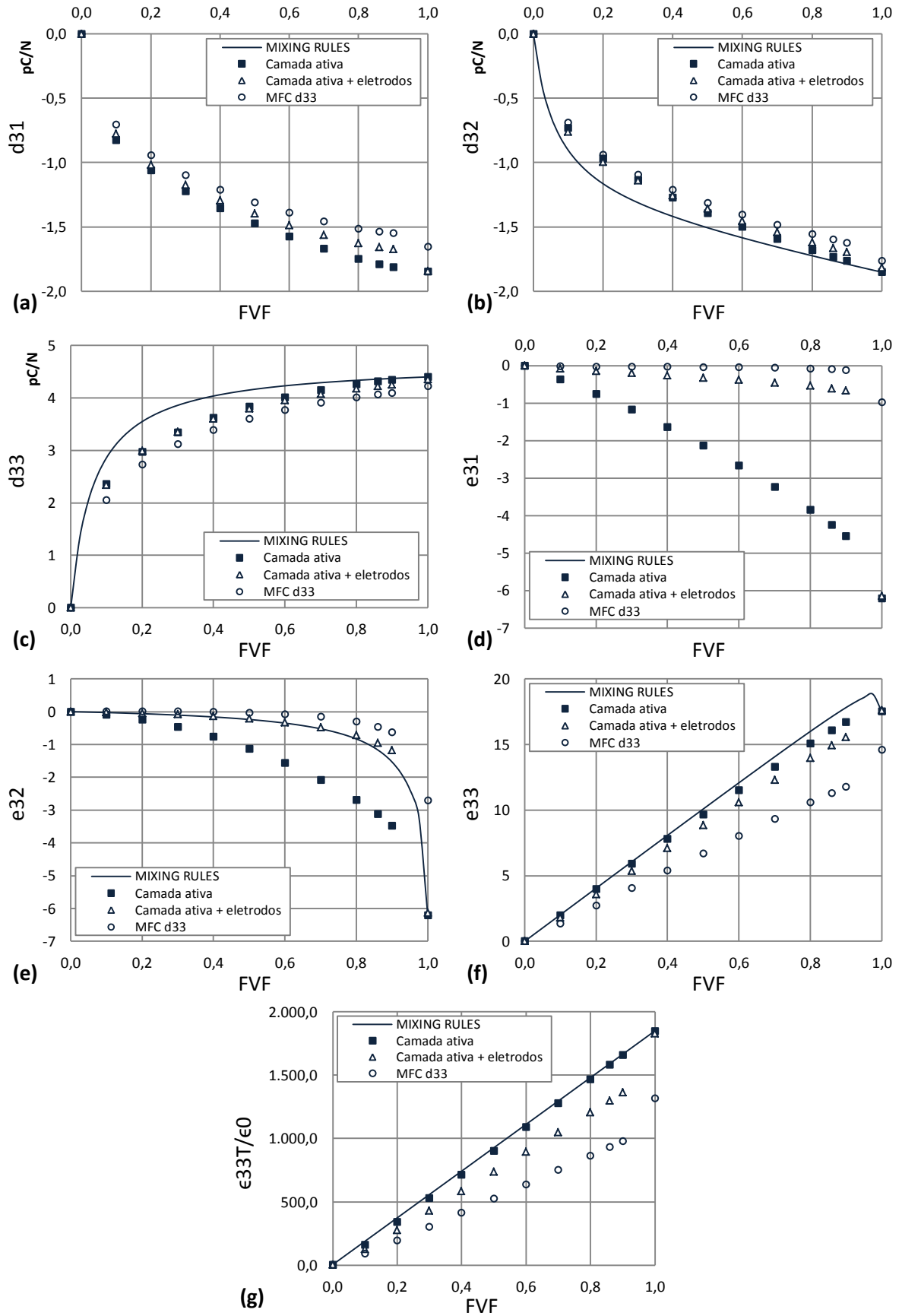


Figura 31 - Evolução das propriedades piezoelétricas e dielétricas do MFC d33 em função do FVF: comparação entre as regras de mistura + e a técnica de homogeneização periódica em elementos finitos.

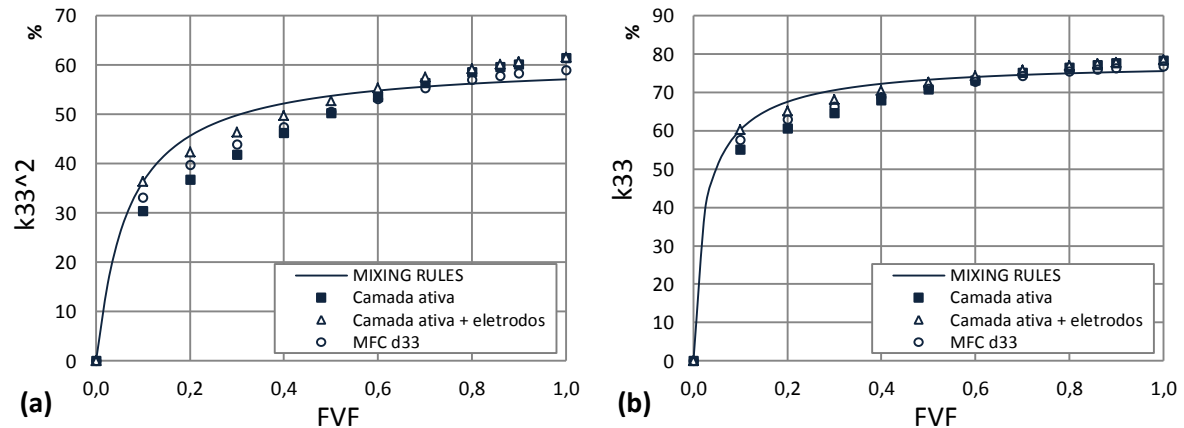


Figura 32 - Evolução dos coeficientes de acoplamento eletromecânico do MFC d33 em função do FVF: comparação entre as regras de mistura e a técnica de homogeneização periódica em elementos finitos.

A tabela 5 apresenta os valores das propriedades efetivas homogêneas do MFC d33, para uma FVF de 0,86, resultantes dos métodos: das regras de mistura, da camada ativa em elementos finitos, do MFC d33 em elementos finitos e as propriedades do transdutor comercial fornecidas pela *Smart Materials*. Na tabela, “A” faz referência ao modelo analítico, “N” ao modelo numérico, “CA” à camada ativa e “MFC” ao MFC d33 completo. As mesmas observações feitas dos gráficos acima podem ser feitas aqui se comparando os valores dessa tabela. Essas observações envolvem a influência da inserção de outras camadas no RVE, como a de kapton (Camada ativa x MFC d33), bem como o efeito provocado pela diferença na configuração do potencial elétrico dos eletrodos utilizados entre o modelo analítico e o modelo numérico, em que, neste último, são considerados curto circuitados (Regras de mistura x Camada ativa).

Nem todos os valores das propriedades que foram calculadas aqui estão disponíveis nos *datasheets* fornecidos pela fabricante *Smart Materials*, mas de acordo com os que eles informam, pode-se ver que seus valores são próximos aos encontrados neste trabalho.

Tabela 5- Propriedades efetivas homogêneas do MFC d33 resultantes dos diferentes métodos utilizados.

Constante	Símbolo	Unidade	A (CA)	N (CA)	N (MFC)	C (MFC)
	Y1	GPa	—	47,5	85,0	—
Módulo de Young	Y2	GPa	14,8	18,8	16,4	15,86
	Y3	GPa	41,5	45,0	28,9	30,34
Módulo de cisalhamento	G_{32}	GPa	8,95	7,05	6,70	—

	G_{13}	GPa	2,59	4,52	2,55	—
	G_{12}	GPa	10,50	5,87	2,19	5,52
Coeficiente de Poisson	ν_{32}	—	0,30	0,29	0,27	—
Constante piezoelétrica	d_{31}	pC/N	—	-179	-154	-210
	d_{32}	pC/N	-176	-173	-159	—
	d_{33}	pC/N	435	431	406	460
Constante piezoelétrica	e_{31}	pC/N	—	-4,25	-0,10	—
	e_{32}	pC/N	-1,10	-3,12	-0,47	—
	e_{33}	pC/N	16,93	16,07	11,30	—
Constante dielétrica relativa	$\frac{\epsilon_{33}^T}{\epsilon_0}$	—	1573	1583	932	—
Coeficientes de acoplamento eletromecânico	k_{33}^2	—	56%	60%	58%	—
	k_{33}	—	75%	77%	76%	—

5. CONCLUSÕES

Considerando os resultados expostos neste trabalho, é possível afirmar que existe uma boa correlação entre os dados obtidos pelos diferentes métodos utilizados. Suas divergências e seus motivos de causa foram estudados e descritos nos resultados.

A comparação entre os dados resultantes dos RVEs de camada ativa de ambos os métodos evidenciou o efeito causado pela diferença na configuração do potencial elétrico dos eletrodos utilizados entre o modelo analítico e o modelo numérico, em que, neste último, são considerados curto circuitados e interdigitados, o que causa uma heterogeneidade nas propriedades do RVE como um todo.

A influência da inserção de novas camadas no RVE do transdutor, como as de eletrodos e as de kapton, foram avaliadas quando se aplicou o método numérico para diferentes tipos de RVEs. Percebeu-se que ao mesmo tempo em que essas camadas tornam o MFC mais flexível, elas também reduzem o seu desempenho eletromecânico, além de promoverem, também, certa heterogeneidade em algumas propriedades ao longo do RVE.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS¹

CARBONARI, R. C. **Projeto de atuadores Piezoelétricos Flexensionados Usando o Método de otimização Topológica**. Dissertação de Mestrado, São Paulo – Brasil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003.

DERAEMAERKER, A.; BENELECHI, S.; BENJEDDOU, A.; PREUMONT, A. Analytical and Numerical Computation of Homogenized Properties of MFCs: Application to a Composite Boom with MFC Actuators and Sensors. **III ECCOMAS THEMATIC CONFERENCE ON SMART STRUCTURES AND MATERIALS**, 2007.

DERAEMAERKER, A.; NASSER, H.; BENJEDDOU, A.; PREUMONT, A. Mixing rules for the piezoelectric properties of macro fiber composites. **J. Intell. Mater. Syst. Struct.**, v.20, n.12, p. 1475–82, 2009.

DERAEMAERKER, A.; NASSER, H. Numerical evaluation of the equivalent properties of macro fiber composite (MFC) transducers using periodic homogenization. **Int. J. Solids Struct.**, v.47, n. 24, p. 3272–85, 2010.

GUIMARÃES, C. G.; BUSSAMRA, F.L.S.; POMMIER-BUDINGER, V.; HERNANDES, J.A.; Structural shape control using macro fiber composite piezoelectric sensors and actuators. **Mecânica Computacional**, v.29, p. 8263-8279, 2010.

IEEE; Standards on Piezoelectricity IEEE. 1996.

IKEDA, T. **Fundamentals of Piezoelectricity**. New York – EUA, Oxford University Press, 1996.

NUFFER, J.; BEIN, T. Application of piezoelectric materials in transportation industry. In: GLOBAL SYMPOSIUM ON INNOVATIVE SOLUTIONS FOR THE ADVANCEMENT OF THE TRANSPORT INDUSTRY, 4.-6., 2006, San Sebastian, Espanha. Disponível em: <http://www.inmar.info/press/InMAR_Reliability_TRANSFAC_2006.pdf>. Acesso em: 12 out. 2012.

SMART-MATERIAL®, MFC Datasheet. Disponível em: <<http://www.smart-material.com>>. Acesso em: 10 set. 2012.

TRINDADE, M. A.; BENJEDDOU, A. Finite element homogenization technique for the characterization of d15 shear piezoelectric macro-fibre composites. **Smart Materials and Structures**, v.20, n.7, 075012, 2011.

TRINDADE, M. A.; BENJEDDOU, A. Parametric analysis of effective material properties of thickness-shear piezoelectric macro-fibre composites. **J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.**, 2012.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.