

Análise de impacto entre estruturas de casca

ALLAN YOSHIO SUZUKI

São Carlos, SP

Julho de 2016

ALLAN YOSHIO SUZUKI

Análise de impacto entre estruturas de casca

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Engenharia de São Carlos para conclusão de graduação em Engenharia Mecânica e obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

São Carlos, SP

Julho de 2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S968a Suzuki, Allan Yoshio
Análise de impacto entre estruturas de casca /
Allan Yoshio Suzuki; orientador Rodolfo André Kuche
Sanches. São Carlos, 2016.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2016.

1. Análise numérica. 2. Impacto. 3. Estruturas de
casca. 4. Análise não-linear geométrica. 5. Elementos
finitos. I. Título.

FOLHA DE AVALIAÇÃO

Candidato: Allan Yoshio Suzuki


Título: Análise de impacto entre estruturas de casca

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo
Curso de Engenharia Mecânica.

BANCA EXAMINADORA

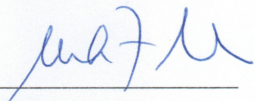
Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches - Orientador

Nota atribuída: 9,5 (Nove e Meio)


(assinatura)

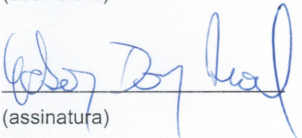
Prof. Dr. Marcelo Areias Trindade

Nota atribuída: 9,5 (NOVE E MEIO)


(assinatura)

Prof. Dr. Edson Denner Leonel

Nota atribuída: 9,5 (NOVE E MEIO)


(assinatura)

Média: 9,5 (Nove e Meio)

Resultado: Aprovado

Data: 04/07/2016

Este trabalho tem condições de ser hospedado no Portal Digital da Biblioteca da EESC

SIM NÃO Visto do orientador 

Este trabalho é dedicado àquele que planejou, desenhou e pintou o mundo em que vivemos, até os dias de hoje; e àqueles que um dia poderão enxergar Seu mundo de outra forma (além das suas leis) e, assim, conhecer o verdadeiro Criador.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter criado um mundo tão complexo, mas também tão atraente e interessante aos olhos de qualquer um, de forma que todos buscam de alguma forma entender e conhecê-lo melhor; por me conceder o dom da vida, do conhecimento, vontade de aprender e entender as coisas que Ele criou; por me permitir errar e acertar diversas vezes, crescendo em maturidade e espírito, me fazendo ser quem eu sou; por ser meu suporte e ânimo todos os dias; e permitir a criação desse trabalho.

Agradeço a minha namorada Larissa Medeiros de Sousa, pois, através dela, Deus mostrou meus erros e fez com que, juntos, superássemos as dificuldades.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches, que confiou em mim e despertou vontade e potencial como estudante, pesquisador e pessoa para beneficiar a sociedade com meus dons e talentos, que Deus me concedeu.

Agradeço ainda ao Prof. Dr. Edson Denner Leonel, que através de seu exemplo como professor, me senti à vontade para conversar sobre orientação e, por seu intermédio, Deus me fez conhecer o meu orientador.

Agradeço a Dorival Piedade Neto e Roberto Fagá Júnior e pessoas presentes em cada dia de trabalho, que foram importantíssimas nas épocas de crises e dificuldades com relação ao andamento do presente trabalho.

Agradeço aos alunos Jeferson Wilian Dossa Fernandes e Sergio Andres Pardo Suarez, que me acompanharam desde o início e sempre se dispuseram a tirar dúvidas; e foram exemplos de acadêmicos para mim.

Agradeço a minha mãe e meu pai, por me apoiarem nos estudos da faculdade, participar de algumas decisões na vida acadêmica e me instigar a crescer profissionalmente.

*"E Deus viu tudo o que havia feito,
e tudo havia ficado muito bom."
(Bíblia sagrada, Gênesis 1. 31a)*

*"O Senhor Deus colocou o homem no jardim
do Éden para cuidar dele e cultivá-lo."
(Bíblia sagrada, Gênesis 2. 15)*

Resumo

O presente trabalho consiste no desenvolvimento de modelo numérico para análise de problemas de impacto entre estruturas elásticas de casca. Para isso é estudada a análise da dinâmica de cascas, algoritmos de detecção do impacto e de imposição de condições de contato. Emprega-se um elemento de casca em formulação baseada em posições, a qual admite grandes deslocamentos. Essa formulação evita a necessidade de aproximação de rotações finitas e permite o uso do integrador de Newmark de forma estável. A detecção do impacto é baseada nas curvas de nível de uma função distância assinalada entre os corpos (*level-set*). Para garantir a não penetração, emprega-se uma técnica de retorno baseada em multiplicadores de Lagrange, que aplica condições subsidiárias a sistema de equações durante o processo iterativo. Por fim, verifica-se a eficácia e robustez do modelo proposto por meio de exemplos numéricos.

Palavras-chaves: Análise numérica. Impacto. Estruturas de casca. Análise não-linear geométrica. Elementos finitos.

Abstract

This work aims to develop a numerical algorithm for analysis of impact problems between elastic shell structures. It will study the analysis of shell dynamics, impact detection algorithms and contact conditions imposed. It employs a shell element based on positional formulation which allows large displacements. This formulation avoids the need to approach finite rotations and allows the stable use of Newmark integrator. The detection of the impact is based on curve levels of a signal distance function calculated between the bodies. To ensure the non penetration condition, it is employed a position return technique based on Lagrange multipliers applying subsidiaries conditions on system equations during the iterative process. Finally, it is verified the effectiveness and robustness of the model using numerical examples.

Key-words: Numerical Analysis. Impact. Shell structures. Geometric non linear analysis. Finite elements.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Mapeamento posicional do elemento de casca	29
Figura 2 – Elemento finito de casca	32
Figura 3 – Esquema de contato entre estruturas	33
Figura 4 – Esquema de contato entre estruturas	34
Figura 5 – Distância de penetração.	36
Figura 6 – Geometria e cinemática inicial do problema (duas estruturas anelares).	39
Figura 7 – Tempo x Posição na direção x dos nós impactante e alvo (duas estruturas anelares).	40
Figura 8 – Configuração das estruturas anelares no tempo (duas estruturas anelares).	40
Figura 9 – Geometria e cinemática inicial do problema (três estruturas anelares).	41
Figura 10 – Tempo x Posição na direção x dos nós impactante e alvo (três estruturas anelares).	42
Figura 11 – Tempo x Posição na direção y dos nós impactante e alvo (três estruturas anelares).	43
Figura 12 – Geometria e cinemática inicial do problema.	44
Figura 13 – Tempo x Posição na direção x dos nós impactante e alvo (três estruturas esféricas).	44
Figura 14 – Análise da velocidade em determinados instantes.	45

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Objetivos	20
1.2	Justificativa	20
1.3	Metodologia	21
1.4	Apresentação do trabalho	21
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1	Análise não-linear geométrica	23
2.2	Problema de contato/impacto	24
2.2.1	Detecção de impacto	25
2.2.2	Imposição de impacto	26
3	ANÁLISE NUMÉRICA DA DINÂMICA DE CASCAS	29
3.1	Formulação posicional do elemento de casca	29
3.2	Discretização no tempo	31
3.3	Elemento utilizado	32
4	DETECÇÃO DE IMPACTO	33
5	IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE NÃO PENETRAÇÃO	35
6	EXEMPLOS NUMÉRICOS	39
6.1	Impacto entre dois anéis	39
6.2	Impacto entre três anéis	41
6.3	Impacto entre três esferas	44
7	CONCLUSÃO	47
	Referências	49

1 INTRODUÇÃO

É muito comum a ocorrência de colisão entre estruturas, sejam acidentais, tais como em acidentes automobilísticos, ou sejam propositais, tais como em sistemas dinâmicos de multicorpos que dependam do contato para desempenhar sua função. O estudo dos problemas de impacto pode ajudar a evitar não só desperdício material, mas também compreender melhor seus efeitos mecânicos, melhorando a segurança de mecanismos e protegendo vidas.

Os problemas de impacto, mesmo em estruturas constituídas por material de comportamento elástico-linear e a baixos níveis de tensão, são problemas de natureza geometricamente não linear. Assim a descrição matemática produz modelos que são bastante complexos e, em geral, não apresentam solução analítica. Aliado ao fato de que análises experimentais demandam muito tempo e recursos materiais, análises numéricas vêm sendo utilizadas e diversos autores mostram resultados satisfatórios. Pode-se comprovar tal fato ao verificar, por exemplo, que atualmente competições automotivas e desenvolvimento de produtos de engenharia utilizam vastamente softwares de simulação computacional para otimização de projetos e produtos.

O estudo numérico de impacto entre estruturas é um assunto relativamente atual e aplicado em diversas áreas da engenharia, havendo grande variedade de pesquisas e publicações referentes ao assunto. Além disso, como não é possível definir o estado de equilíbrio a partir da configuração inicial do problema, necessita-se realizar análise não linear geométrica, além de empregar um modelo adequado de imposição de forças de contato, as quais dependem da geometria e da cinemática do problema.

No trabalho de Willinger, Kang e Diaw (1999), por exemplo, simplifica-se um modelo numérico da cabeça humana submetida a impacto. Apesar do modelo ser validado para impactos de curta duração, análises de impactos de longa duração geram resultados limitados por não considerar a análise não linear geométrica no modelo, justificando a importância do emprego de tal análises nesse problemas.

O presente trabalho trata do desenvolvimento e implementação de modelo para detecção de intersecção e imposição de condição de não penetração a fim de modelar problemas de impacto em estruturas de casca. As implementações são feitas em programa de análise dinâmica não linear geométrica de cascas desenvolvido anteriormente pelo grupo de pesquisas em trabalhos orientados pelo professor Humberto Breves Coda.

O modelo proposto utiliza curvas de nível de uma função distância assinalada aos outros corpos (função Level-set) para detectar a ocorrência de intersecção e a não penetração é imposta com o uso de multiplicadores de Lagrange. Por fim o modelo é testado

e verificado com o uso de exemplos numéricos e comparação com dados da literatura.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste projeto é obter um modelo computacional para análise de problemas de impacto entre estruturas elásticas de casca, baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), que seja robusto e versátil para simulação de diferentes problemas de engenharia.

Objetivos específicos:

- Estudo aprofundado da dinâmica das estruturas de casca em formulação posicional;
- Estudo de algoritmos para a identificação da intersecção entre diferentes corpos;
- Estudo de algoritmos de retorno baseados em multiplicadores de Lagrange;
- Complemento da formação do aluno de graduação possibilitando o desenvolvimento do trabalho de conclusão de curso.

1.2 Justificativa

Problemas envolvendo contato ou impacto entre corpos são muito comuns na engenharia mecânica. Para que tais problemas sejam adequadamente modelados, é necessária uma análise não linear geométrica, pois depende de se impor condição de não penetração entre estruturas e imposição de forças de contato dependentes da mudança de geometria. Soluções analíticas só são realmente possíveis para casos simples e com simplificações que se distanciam bastante do caso real. Já as análises experimentais são bastante dispendiosas e, além de recursos, demandam tempo. Isso leva à busca por métodos numéricos eficientes para a simulação desses problemas, contribuindo assim para que pelo menos seja possível diminuir o número de protótipos em análises experimentais.

Os assuntos abordados nesse projeto são de atual importância e constante desenvolvimento, comprovada pela extensa variedade e quantidade de pesquisas e publicações, considerando, portanto, que qualquer contribuição nesta área é muito significativa. Portanto, dada a importância desses problemas no contexto da engenharia mecânica, além da sua complexidade de solução e necessidade de emprego de técnicas atuais e robustas, o presente trabalho é justificado.

1.3 Metodologia

Os programas são escritos em Fortran 77 e empregam processamento paralelo com protocolo MPI. As implementações serão essencialmente em linguagem Fortran 77 em ambiente Linux, devido à plataforma já disponível. A interpretação dos resultados (pós processamento) será feita através do programa de visualização científica KitwareParaview e GNUplot.

Para se cumprir os objetivos propostos, uma metodologia de aproveitamento dos códigos desenvolvidos anteriormente no grupo de pesquisa é imprescindível. O programa já é capaz de realizar análise de estruturas de cascas finas ou espessas com grandes deslocamentos e inicialmente curvas. A formulação já empregada baseia-se em posições ao contrário das formulações tradicionais que utilizam deslocamentos e rotações como parâmetros nodais, sendo a integração temporal implícita com o uso do integrador de Newmark, conforme apresentado por Sanches e Coda (2013)

No presente trabalho, desenvolve-se um modelo para a detecção da interseção baseado no método *level-set* aos outros corpos e as condições de não penetração são impostas por meio de multiplicadores de Lagrange. Por fim, o programa é verificado através da comparação com exemplos da literatura e aplicações mais complexas são propostas.

1.4 Apresentação do trabalho

O presente trabalho pode ser dividido em três grandes partes, sendo: *introdução*, que compreende os capítulos 1 e 2, *desenvolvimento*, compreendendo os capítulos 3 a 6, e a *conclusão*, capítulo 7.

No capítulo 2 apresenta-se uma revisão bibliográfica, sobre análise não-linear geométrica e os problemas de contato/impacto, abordando formulações da literatura aplicadas à elementos finitos que mapeiam as configurações das estruturas e técnicas de detecção e imposição das forças do impacto nos domínios computacionais.

No capítulo 3 aborda-se mais profundamente a formulação posicional e suas vantagens com relação a simulações que apresentam grandes deslocamentos, a metodologia de discretização no tempo pelos integradores de Newmark e apresenta-se o elemento finito utilizado.

No capítulo 4, a técnica da distância assinalada utilizando-se do método das curvas de nível *level-set* é apresentada e detalhada para detecção de impacto.

No capítulo 5, a aplicação dos multiplicadores de Lagrange é apresentada e detalhada para aplicar o algoritmo de retorno ou imposição das forças de impacto.

No capítulo 6 apresenta-se os exemplos numéricos relacionados a análise de im-

pacto entre estruturas compostas por elementos finitos de casca, destacando-se o exemplo numérico do impacto entre dois anéis, que é uma verificação do programa desenvolvido com os resultados da literatura.

E no capítulo 7 são realizadas considerações e propostas de temas ou aprofundamentos para trabalhos futuros baseados nos desenvolvimentos apresentados no presente trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Análise não-linear geométrica

O estudo de mecânica dos sólidos pode ser dividido em linear e não linear referindo-se à geometria da estrutura. A análise linear geométrica considera o equilíbrio de forças da estrutura em relação a posição inicial, que é não deslocada e indeformada. Essa simplificação leva à formulação de equações lineares simples e resultados uteis para diversas aplicações na engenharia (CODA, 2003).

Já a análise não linear geométrica considera o equilíbrio na posição final, ou atual, que é deformada e deslocada, levando a soluções mais verossímeis, mesmo em situações com grandes deformações e deslocamentos. Entretanto essa análise conduz a um equacionamento mais complexo, levando em conta a alteração da geometria, geralmente necessitando de soluções numéricas (SANCHES, 2011; FELIPPA, 2004).

A maioria das soluções numéricas para tais problemas atualmente são baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF). Esse método tem se destacado como alternativa viável e mais versátil para solução de problemas de análise estrutural, tornando-se o método mais difundido na área de análise estrutural (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; SANCHES, 2011).

Para realizar a análise não linear geométrica de problemas de impacto de estruturas de casca se faz necessário a utilização de uma formulação Lagrangeana. Alguns trabalhos utilizam formulações Lagrangeanas co-rotacionais para solução de problemas não lineares geométricos, tais como Faroughi, Khodaparast e Friswell (2015), Simo, Hjelmstad e Taylor (1984), Simo et al. (1986), Simo e Laursen (1992) e destacando os trabalhos de Lin e Hsiao (2007), Kim e Lomboy (2006) por se tratarem de elementos de casca. Essa formulação consiste em separar o movimento de translação e rotação do corpo rígido das suas deformações, fixando o sistema de coordenadas em cada elemento, ou seja, o sistema gira e translada juntamente com o elemento, realizando, portanto, somente a análise de deformações (para mais detalhes ver Crisfield e Moita (1996)).

No entanto, uma dificuldade dessas formulações é que não se pode considerar a comutatividade de rotações em grandes deslocamentos, levando a aproximações de grandes rotações que podem implicar por em matriz de massa variável nos casos dinâmicos Sanches e Coda (2013).

O caráter dinâmico dos problemas em estudo requer ainda a solução de integrais temporais. O método de integração temporal mais utilizado é o de Newmark (NEW-

MARK, 1959), apesar de existirem diversos métodos na literatura. Isso se deve à facilidade de implementação. Entretanto, muitos trabalhos atestam que a formulação co-rotacional apresenta instabilidades quando se utiliza o algoritmo integrador de Newmark (SANCHES, 2011; SÁNCHEZ, 2013). Como a formulação co-rotacional tem como incógnitas as rotações, e no presente trabalho há composição complexa de deslocamentos e rotações, busca-se outra forma de tratar o problema.

Como alternativa, o trabalho de Cirak, Ortiz e Schroder (2000) utiliza-se o método de subdivisão de malha da estrutura e aplica a teoria de deslocamentos de Kirchhoff-Love aplicado à estruturas de casca. O processo de interpolação induzido pela subdivisão é não-local, ou seja, o campo de deslocamentos sobre um elemento depende dos seus deslocamentos nodais e também dos nós imediatamente vizinhos.

A formulação posicional, introduzida simultaneamente por Coda (2003), motivada por Bonet et al. (2000), é outro método baseado em descrição Lagrangeana que vem se desenvolvendo de maneira bastante satisfatória, como atestam os trabalhos de Coda e Paccola (2007), Coda (2009), Sanches (2011), Sanches e Coda (2013), Sanches e Coda (2014), com destaque para o trabalho de Greco, Coda e Venturini (2004), que aplica essa formulação na solução de problemas de contato/impacto com grandes deslocamentos. A formulação posicional é didaticamente simples e apresenta solução independente do caminho de rotação, condição imprescindível para este tipo de aplicação, tendo como grande vantagem a matriz de massa constante, permitindo o uso do integrador de Newmark com conservação da quantidade de movimento e com conservação da energia para a grande maioria dos problemas (para mais detalhes ver Sanches e Coda (2013)).

2.2 Problema de contato/impacto

Os problemas de contato e impacto entre estruturas estão presentes em diversas áreas da engenharia, por exemplo, a análise de multicorpos como acidentes automobilísticos. Esse tipo de problema é de natureza fortemente não-linear geométrica, devido a acentuada alteração da geometria das estruturas submetidas ao impacto; e também de deformações plásticas e até rompimentos de partes da estrutura, as quais não serão abordadas no presente trabalho (ZAOUK et al., 1996; BOHN et al., 2013).

Desde a inserção do Método dos Elementos Finitos (MEF) no final da década de 50, soluções numéricas para problemas de contato vem sendo intensamente investigadas por vários pesquisadores. Trabalhos como os de Conry e Seireg (1971), Chan e Tuba (1971), Francavilla e Zienkiewicz (1975) ganham destaque como estudos pioneiros no tratamento de problemas de contato e impacto na década de 70. Ainda, Hughes et al. (1976) contribuiu significativamente com o desenvolvimento de um método para elementos finitos com aplicação dos multiplicadores de Lagrange aplicável a simulações de grandes

deslocamentos (TAYLOR; PAPADOPOULOS, 1993).

Desde então, devido à falta de métodos robustos que garantam menor esforço computacional para abordar tais problema, diversas pesquisas nessa área ainda vêm sendo realizadas, como atestam os trabalhos de Piedade (2009), Wriggers e Laursen (2006), Willinger, Kang e Diaw (1999), Biabanaki, Khoei e Wriggers (2014).

O estudo numérico dos problemas de impacto numérico compreende duas etapas: a da ocorrência do impacto e a imposição das forças de contato. Estas etapas serão brevemente abordadas nas seções seguintes.

2.2.1 Detecção de impacto

Durante o processo iterativo de simulação é necessário identificar se houve intersecção entre as estruturas e qual a região dos corpos sofre impacto, para que possam ser adequadamente empregadas técnicas que garantam a não penetração.

Greco, Coda e Venturini (2004) propõem um algoritmo de identificação de impacto baseado nas equações integrais de um problema potencial relacionado ao contorno da estrutura impactada. Esse algoritmo utiliza o método dos elementos de contorno e a teoria do potencial para integrar os campos de potencial e detectar se houve colisão. Aplicando a técnica de integração em uma estrutura para um ponto fonte, o parâmetro livre $c(x)$, que determina o valor integração, indica que houve impacto quando $c(x) \neq 0$.

O método das falsas posições, demonstrado em Piedade (2009), consiste em verificar localmente se uma função possui raiz, ou seja, se houve intersecção entre as estruturas, avaliando o valor da função nas extremidades do intervalo proposto. Assim, determina-se a região do impacto ao encontrar as raízes da função.

Uma forma muito robusta, empregada em geral nos métodos de contorno imerso para detectar a intersecção entre elementos finitos é o uso de curvas de nível de uma função distância assinalada (*Level-Sets*) (SANCHES; BORNEMANN; CIRAK, 2011; CIRAK; RADOVITZKY, 2003; SANCHES; CODA, 2013; HÖLLIG; REIF; WIPPER, 2002; TONON; CARRAZEDO; SANCHES, 2016).

O trabalho de Krause e Mohr (2011) é um exemplo da utilização do algoritmo da distância assinalada para detecção do impacto. Essa técnica consiste em determinar a distância entre um nó da estrutura impactante (ou projétil) e a estrutura impactada (ou alvo) adotando um sinal a esse valor da distância. Esse sinal, se for negativo, indica que houve intersecção das estruturas, sendo a região de intersecção aquela definida pela curva de nível zero da função distância assinalada. Devido à robustez e simplicidade dessa técnica, opta-se por ela no presente trabalho.

2.2.2 Imposição de impacto

Sem restrições quanto ao contato, os domínios computacionais dos corpos ficam transponíveis uns aos outros, podendo se atravessar livremente. Assim, necessita-se de um método que possa aplicar condições de contorno entre estruturas, de tal forma que não permita ocorrer interpenetração. Há mais de um método na literatura para tal.

O método dos multiplicadores de Lagrange consiste em introduzir variáveis adicionais λ_L - os multiplicadores de Lagrange - para obedecer direta e exatamente as condições de restrição que serão aplicadas ao variacional de energia total da estrutura, de forma que a minimização do funcional se dá com respeito às condições subsidiárias.

É importante observar que nesse método, λ_L constitui-se de uma incógnita a mais a ser determinada para a resolução do problema. Além disso, o método possui algumas dificuldades devido à presença de zeros na diagonal do seu sistema de equações, deixando o sistema mal condicionado (PIEIDADE, 2009; WEYLER et al., 2012).

No entanto, atualmente se dispõe de solvers bastante eficientes com técnicas pré condicionadoras que contornam esse problemas, como pode ser visto por exemplo nas bibliotecas PETSc e HSL, sendo as últimas utilizadas neste trabalho; as quais necessitam de técnicas de solução, como o método de Uzawa, que é capaz de tratar tais problemas com eficiência e podem ser facilmente paralelizados. Um método iterativo para esse tipo de sistema e que pode ser facilmente paralelizado é o método de Uzawa, sendo que os trabalhos de Koko (2009), Myśliński (2015) atestam a robustez e versatilidade do método Uzawa aplicado aos problemas de contato. Devido a facilidade de implementação e robustez de tal método, este será empregado no presente trabalho.

Outra forma de se impor o impacto é o método da penalização, que consiste em adicionar uma função de penalização, multiplicada por um fator de penalização λ_P , às equações governantes. O valor para esse fator é alterado de forma que atenda à restrição de contato entre as estruturas. Teoricamente, à medida em que o parâmetro de penalização λ_P tende a infinito, a restrição é exatamente aplicada, o que implica que a condição de impenetrabilidade é relaxada de acordo com o valor do parâmetro. Entretanto os exemplos de Weyler et al. (2012), Fox (1971) atestam que o sistema de equações resultante fica mal-condicionado com valores crescentes de λ_P . É importante ressaltar que, diferentemente da técnica dos multiplicadores de Lagrange, o método da penalização não inclui novas incógnitas a serem calculadas, ou seja, o funcional condicionado tem a mesma dimensão que o funcional original da estrutura (PIEIDADE, 2009; WEYLER et al., 2012).

Como uma combinação dos métodos anteriores, surge o método de Lagrange aumentado, que consiste no aprimoramento da solução do método da penalização, aplicando ao funcional um termo de penalização e um de multiplicador de Lagrange. Na verdade o termo do funcional condicional pode apresentar os termos dos multiplicadores de La-

grange e de penalização de diversas formas, como se observa em Secchi (2015), Zhang e Li (2015), Hirmand, Vahab e Khoei (2015). O problema de mal condicionamento da técnica por penalização é melhorado, pois a introdução do termo multiplicador de Lagrange faz com que o termo de penalização se reduza, admitindo valores muito menores e convergindo mais rapidamente, como atesta Bertsekas (2014).

Conforme Greco (2004) observa, os multiplicadores de Lagrange consistem na força de contato, de forma que este autor propõe um método que avalia e corrige as posições de um dos corpos, e as forças necessárias para tal correção são aplicadas ao outro corpo. Em resumo, aplica-se o algoritmo de retorno na estrutura projétil e a distribuição de forças de contato na estrutura alvo. O algoritmo de retorno consiste em calcular a posição do nó da estrutura projétil quando verificado que houve colisão e, em seguida, calcular as forças de contato devido ao nova posição, velocidade e aceleração do ponto da estrutura projétil e distribuir essas forças no elemento ou nó da estrutura alvo (para mais detalhes ver Greco (2004)).

3 ANÁLISE NUMÉRICA DA DINÂMICA DE CASCAS

O presente trabalho utiliza elementos finitos de casca com cinemática de Reissner/Mindlin, uma vez que se pode representar a maioria dos problemas mecânicos com tais elementos. A formulação empregada é baseada em posições ao invés de deslocamentos e rotações, sendo o equilíbrio determinado pelo princípio da energia total estacionária.

3.1 Formulação posicional do elemento de casca

A formulação posicional é uma técnica do MEF para análise não linear geométrica de sólidos e estruturas desenvolvida por Bonet et al. (2000) e adaptada por Coda (2003), onde o campo de deslocamentos é escrito em função de parâmetros nodais correspondentes às posições dos nós e às componentes de um vetor posição generalizado na configuração atual. Após a determinação destes, as tensões e deformações podem ser calculadas com relação à configuração inicial.

Considerando um sistema de referência auxiliar adimensional (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , a configuração inicial B_0 e final (ou atual) B_1 do elemento finito, como se observa na figura 1, as funções de mapeamento f podem ser obtidas.

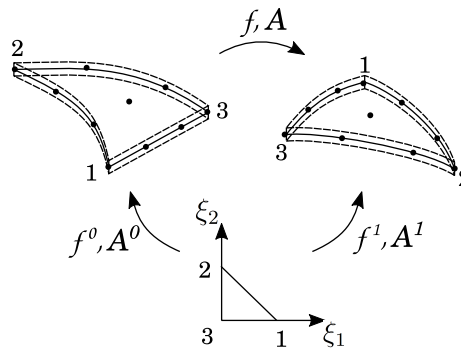


Figura 1: Mapeamento posicional do elemento de casca

As funções de mapeamento (f^0 e f^1) mapeiam respectivamente as configurações B_0 e B_1 em relação ao domínio de referência adimensional. Busca-se, portanto, uma aproximação para obter a função mudança real f da configuração inicial para a configuração final do elemento (CODA; PACCOLLA, 2007).

Tratando-se de estruturas de casca, que são sólidos que possuem uma dimensão muito menor que as outras, utiliza-se a superfície média do elemento como referência para

o mapeamento posicional, como se observa na figura 1. As funções de mapeamento são dadas por (para mais detalhes ver Sanches (2011)):

$$\begin{aligned} f_i^0 &= X_i = N_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)X_{ij} + \frac{h_0}{2}\xi_3 N_j(\xi_1, \xi_2)e_{ij}^0 \\ f_i^1 &= x_i = N_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)x_{ij} + \frac{h_0}{2}\left[\xi_3 + N_j(\xi_1, \xi_2)a_j\xi_3^2\right]N_j(\xi_1, \xi_2)\bar{G}_{ij} \\ \mathbf{x} &= f(\mathbf{X}) = (\mathbf{f}^1) \circ (\mathbf{f}^0)^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo \mathbf{x} as coordenadas referente à configuração B_1 e \mathbf{X} à configuração B_0 , \bar{G}_{ij} são as incógnitas do vetor generalizado no nó j para configuração final, h_0 espessura inicial, e_i^0 é o i -ésimo componente do vetor unitário \vec{e}^0 normal a superfície média na configuração inicial, a_j é a taxa de variação linear da deformação ao longo da espessura.

O gradiente mudança de configuração A é dada por:

$$\mathbf{A} = \nabla f = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{X}} = (\mathbf{A}^1)(\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (3.2)$$

Em seguida, calcula-se o tensor alongamento à direita de Cauchy-Green, C , e se determina o tensor deformação de Green-Lagrange E :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}[A_{ki}A_{kj} - \delta_{ij}] = \frac{1}{2}[C_{ij} - \delta_{ij}], \quad (3.3)$$

sendo δ_{ij} o delta de Kroeneker. Assim, o método de deformação adotado no presente trabalho é o de Green-Lagrange.

A energia de deformação quadrática adotada é (para mais detalhes ver Ogden (1984)):

$$u_e = \frac{1}{2}E_{ij}C_{ijkl}E_{kl}, \quad (3.4)$$

resultando na lei constitutiva do material relacionando a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de Green, conhecida como lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff:

$$S_{ij} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} = C_{ijkl}E_{kl} \quad (3.5)$$

sendo C_{ijkl} os componentes do tensor constitutivo elástico. Assim o termo da energia de deformação do funcional é determinado.

3.2 Discretização no tempo

O integrador temporal empregado para a análise da estrutura é o integrador de Newmark β , para o qual, embora largamente utilizado na análise de estruturas de comportamento linear geométrico, é apontado na literatura por apresentar problemas de estabilidade quando aplicado à estruturas com grandes deslocamentos devido a não conservação do momento e da energia (SANCHES; CODA, 2013). Porém, tal afirmação se referem às formulações co-rotacionais, largamente empregadas em análises não lineares de cascas, e, conforme demonstrado por Sanches e Coda (2013), quando aplicado à formulação posicional, o método de Newmark é estável e apresenta conservação de momento e energia suficiente para os problemas com grandes deslocamentos e pequenas deformações.

No entanto, em se tratando de problemas de impacto, os trabalhos de Greco, Coda e Venturini (2004) e Hu (1997) mostram que para a integração temporal de problemas usualmente instáveis, como no caso do impacto, em que frequências muito altas da estrutura podem ser ativadas, é recomendável utilizar os parâmetros de Newmark com os valores $\beta = 1,0$ e $\gamma = 1,5$.

Após os desenvolvimentos da seção anterior, é possível obter o funcional de energia total do sistema, Π , e aplicar o princípio da mínima energia potencial:

$$\min(\Pi) \implies \delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial Y_1} + \frac{\partial\Pi}{\partial Y_2} + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial Y_n} = 0 \quad (3.6)$$

sendo Y_1, Y_2, \dots, Y_n as variáveis das quais o funcional é dependente.

Pode-se escrever a minimização do funcional de energia para o equilíbrio dinâmico da estrutura como:

$$\frac{\partial\mathbf{U}_e}{\partial\mathbf{x}} - \mathbf{F} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad (3.7)$$

sendo \mathbf{F} o vetor das forças externas, \mathbf{C} a matriz de amortecimento e \mathbf{M} a matriz de massa, que é constante na formulação desenvolvida.

A partir do método de Newmark β , a equação de equilíbrio (3.7) para um dado instante $s + 1$ torna-se:

$$\left. \frac{\partial\mathbf{U}_e}{\partial\mathbf{x}} \right|_{s+1} - \mathbf{F}_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2}\mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_s + \mathbf{C}\mathbf{R}_s + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t}\mathbf{x}_{s+1} - \gamma\Delta t\mathbf{C} \mathbf{Q}_s = 0$$

sendo

$$\mathbf{Q}_s = \frac{x_s}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{x}_s}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_s \quad (3.8)$$

$$\mathbf{R}_s = \dot{x}_s + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{x}_s$$

A equação 3.8 é um sistema não-linear que, no programa empregado neste trabalho, é resolvido pelo método de Newton-Raphson.

3.3 Elemento utilizado

O elemento finito utilizado é um elemento isoparamétrico triangular de 10 nós e 7 parâmetros nodais por nó, sendo: 3 coordenadas i da posição final x_{ji} , 3 componentes i do vetor generalizado \bar{G}_{ij} e a taxa da variação linear da deformação da espessura (CODA; PACCOLA, 2007).

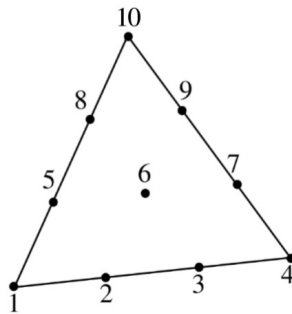


Figura 2: Elemento finito de casca

4 DETECÇÃO DE IMPACTO

Considera-se uma estrutura A contendo o domínio Ω_A e superfície Γ_A , x um ponto qualquer pertencente a superfície Γ_B de uma estrutura de domínio Ω_B , como se observa na figura 3. Calcula-se a distância assinalada de x em relação à estrutura A pela eq. 4.1:

$$SD(x, t) \begin{cases} -\text{dist}(x, \Gamma_A) & \text{para } x \in (\Omega_A) \\ 0 & \text{para } x \in (\Gamma_A \cap \Gamma_B) \\ \text{dist}(x, \Gamma_A) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.1)$$

sendo que o sinal negativo determina que houve interpenetração entre as estruturas.

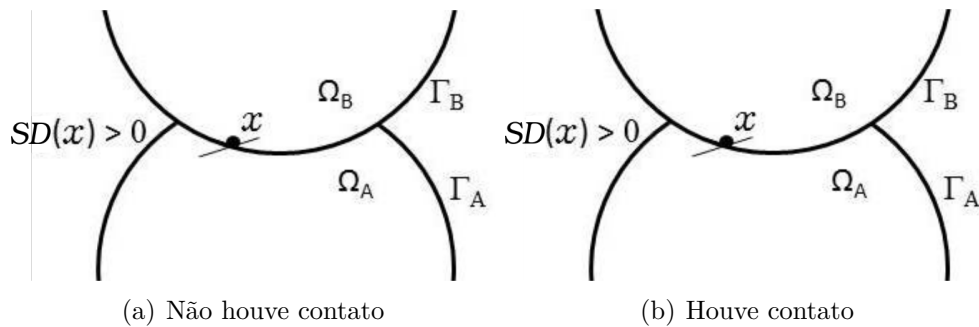


Figura 3: Esquema de contato entre estruturas

A técnica para a obtenção da distância assinalada consiste em calcular e comparar as distâncias entre os nós da estrutura impactante e os elementos da estrutura alvo, adotando um sinal para essa distância de acordo com a orientação do vetor normal da estrutura alvo e do vetor distância entre o nó impactante e o ponto mais próximo na estrutura alvo.

Como é muito difícil calcular a distância entre um ponto e uma superfície curva de alta ordem, uma malha auxiliar é obtida pela divisão de cada elemento cúbico em nove elementos triangulares de aproximação linear (SANCHES, 2011).

Como se observa na figura 4, o algoritmo da distância assinalada empregado no presente trabalho consiste em primeiramente determinar a distância entre o nó impactante e o plano infinito que contém esse elemento.

Caso o ponto de menor distância não esteja contido na região do elemento, supõe-se que a menor distância se encontra nas arestas do elemento e, portanto, calcula-se a menor distância entre o nó impactante e cada reta infinita que contém determinada aresta do elemento. Caso essa menor distância determine um ponto fora do domínio das arestas

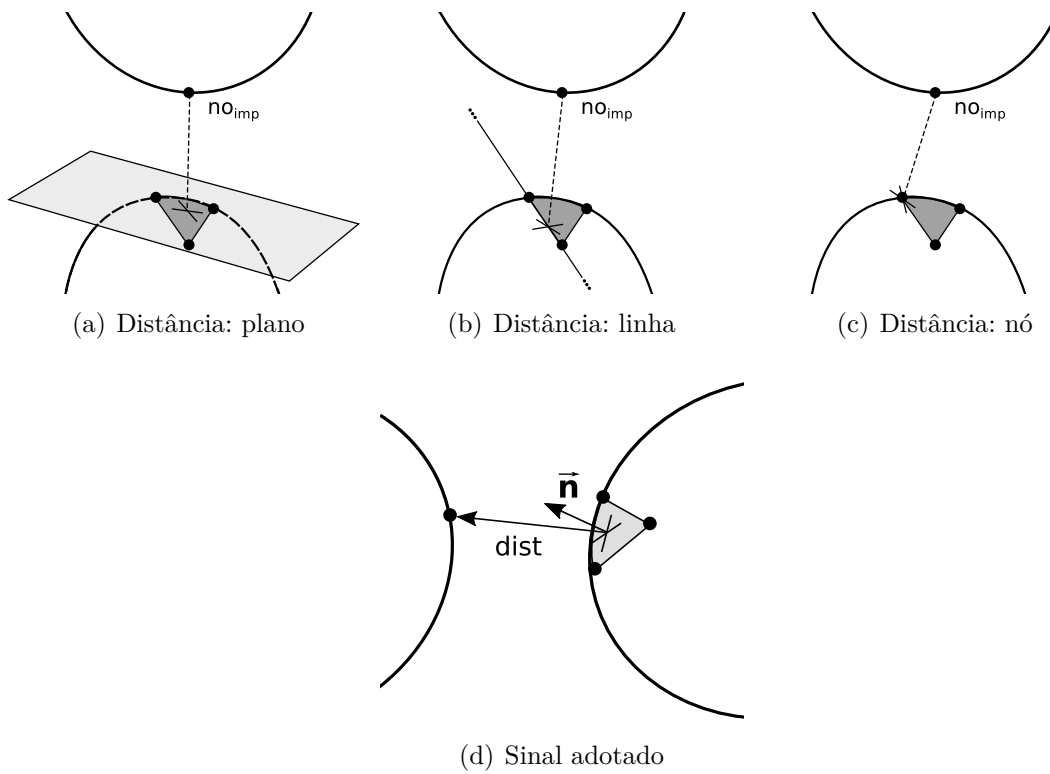


Figura 4: Esquema de contato entre estruturas

do elemento, conclui-se então que a menor distância deste elemento se encontra nos nós, e compara-se a distância entre o nó impactante e os nós do elemento.

Em seguida, verifica-se o sinal que será atribuído a esse valor encontrado realizando o produto escalar entre o vetor distância e o vetor normal do elemento. O sinal atribuído será o do resultado deste produto.

Determinada a menor distância entre o nó impactante e o elemento, realiza as mesmas tarefas em todos os outros elementos lineares da estrutura alvo e, assim, o menor valor de distância assinalada determina o valor da distância assinalada associada ao nó da estrutura.

5 IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE NÃO PENETRAÇÃO

Para que não ocorra a penetração dos nós de um corpo dentro de outro corpo, aplica-se uma técnica de retorno das posições nodais baseada nos multiplicadores de Lagrange. Assim, para cada nó de um corpo projétil, adiciona-se uma condição subsidiária, a qual contém um escalar denominado multiplicador de Lagrange (λ_L), sendo os multiplicadores de Lagrange variáveis adicionadas ao problema de forma a garantir a não penetração, e, conforme pode ser visto em Piedade (2009) e Greco (2004), correspondem às forças de contato.

Dado o funcional de energia da estrutura Π , deseja-se minimizá-lo condicionalmente, ou seja, sobre uma dada condição subsidiária g . Assim o novo funcional sobre o qual deve ser aplicado o princípio da mínima energia potencial passa a ser:

$$\delta\bar{\Pi}(x, \lambda) = \delta\Pi(x) + \lambda_L g = 0 \quad (5.1)$$

sendo que no caso do impacto, λ_L assume o significado físico da força de contato e g o deslocamento relativo que precisa ser revertido entre o nó impactante e o ponto alvo, sendo o produto entre os dois a energia proveniente da força de contato da equação 5.1

É importante observar que $\bar{\Pi}$ é uma função definida num espaço de dimensão superior ao de Π , uma vez que λ_L constitui uma incógnita a mais a ser determinada para a resolução do problema (PIEADADE, 2009). Além disso, o método possui algumas dificuldades devido à presença de zeros na diagonal do seu sistema de equações, deixando o sistema mal condicionado, o que atualmente é quase irrelevante, dado às inúmeras técnicas de condicionamento e *solvers* disponíveis que são capazes de tratar de problemas de pontos de sela.

Entretanto, existem técnicas iterativas, tal como o método de Uzawa, que é capaz de tratar tais problemas com eficiência e podem ser facilmente paralelizados (WEYLER et al., 2012; WRIGGERS; LAURSEN, 2006; SECCHI, 2015). Alguns trabalhos como de Koko (2009), Myśliński (2015) atestam a robustez e versatilidade do método Uzawa aplicado aos problemas de contato.

Detecta-se o impacto através do valor da distância assinalada SD : quando o valor for negativo, houve impacto, conforme visto na seção 4. A seguinte verificação acontece em toda iteração do método de Newton:

1. Cálculo da distância assinalada SD de cada nó ao elemento alvo mais próximo;

2. Se $SD < 0$, aplica-se o multiplicador de Lagrange λ_L , de modo a incluir a condição subsidiária g de acordo com a equação 5.6
3. Resolve-se o sistema aplicando e avança para próxima iteração, voltando para o passo (1)

A distância de penetração, que deve ser anulada, é dada por:

$$\vec{\Delta} = \vec{x}_{imp} - \vec{x}_{alvo} \quad (5.2)$$

sendo x_{imp} o vetor posição do nó impactante e x_{alvo} o vetor posição do ponto alvo, calculado pela intersecção da trajetória do ponto impactante com a estrutura alvo.

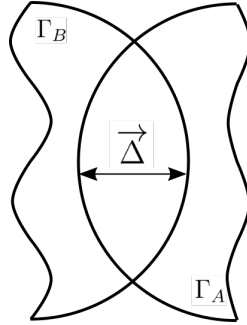


Figura 5: Distância de penetração.

A condição subsidiária para o caso sem atrito consiste em considerar que a projeção de $\vec{\Delta}$ na direção normal à estrutura alvo deve ser nula, ou seja:

$$g = (\vec{\Delta} \cdot \vec{n}) = 0 \quad (5.3)$$

O vetor normal é calculado por:

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{x}_{alvo}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{x}_{alvo}}{\partial \xi_2}}{\left| \frac{\partial \vec{x}_{alvo}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{x}_{alvo}}{\partial \xi_2} \right|} \quad (5.4)$$

sendo \vec{x} o vetor posição do ponto alvo, sendo suas componentes x_i calculadas para as coordenadas paramétricas (ξ_1, ξ_2) de acordo com:

$$x_i = \sum_{j=1}^{10} x_{ji} N_j \quad (\text{para } i=1, 2, 3) \quad (5.5)$$

sendo N_j as funções de forma do nó j , no elemento finito alvo.

A condição subsidiária fica:

$$\lambda(dx_{imp}n_x + dy_{imp}n_y + dz_{imp}n_z - dx_{alvo}n_x - dy_{alvo}n_y - dz_{alvo}n_z) = \lambda(\Delta^0) \quad (5.6)$$

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesse capítulo serão abordados alguns exemplos de verificação do algoritmo e, em seguida, alguns exemplos que atestam sua capacidade e robustez para análise numérica de impacto entre estruturas de casca.

6.1 Impacto entre dois anéis

Esse problema consiste no impacto entre duas estruturas anelares iguais, proposto por Greco, Coda e Venturini (2004). Cada estrutura anelar é discretizada com 240 nós e 40 elementos. A estrutura anelar à esquerda se movimenta em velocidade constante em direção à estrutura alvo. As estruturas estão inicialmente distantes de $\delta = 0,01m$. As características geométricas e condições iniciais do problema se encontram nas figura 6. Considera-se o problema sem atrito, módulo de young de cada estrutura anelar de $E = 210GPa$, densidade específica $\rho = 7700kg/m^3$, e espessura de $e = 0,05m$. Os nós identificados no_{imp} e nó no_{tg} pertencem, respectivamente, à estrutura impactante a à estrutura alvo e servem de base para verificação dos resultados. Para os resultados do problema o passo de tempo foi de $\Delta t = 0,05ms$.

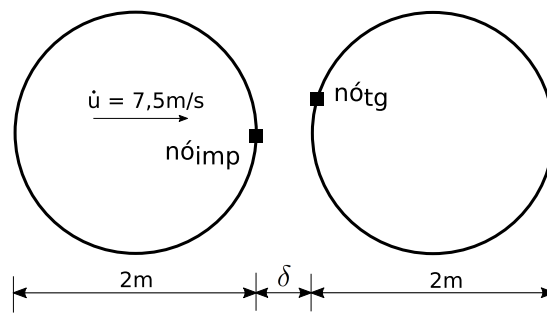


Figura 6: Geometria e cinemática inicial do problema (duas estruturas anelares).

Na figura 7 comparam-se os deslocamento dos de referência obtidos no presente trabalho com os resultados obtidos no trabalho de Greco, Coda e Venturini (2004) a partir do primeiro impacto. Nota-se grande semelhança, devendo-se ainda comentar que a quantidade e os elementos utilizados no presente trabalho são diferentes da referência, na qual o autor emprega elementos de barra bidimensionais em cinemática de Bernoulli. Observa-se que o impacto dura aproximadamente $25ms$.

Na figura 8 são apresentados quadros do problema em diferentes instantes.

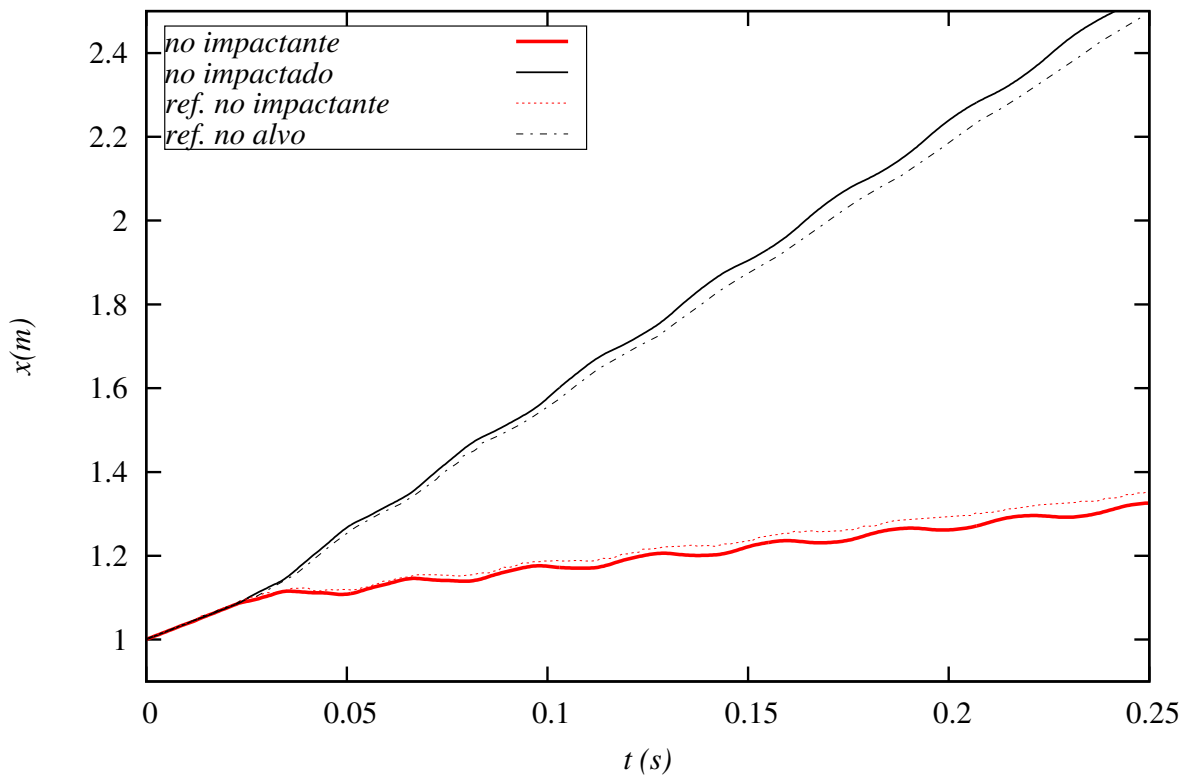


Figura 7: Tempo x Posição na direção x dos nós impactante e alvo (duas estruturas anelares).

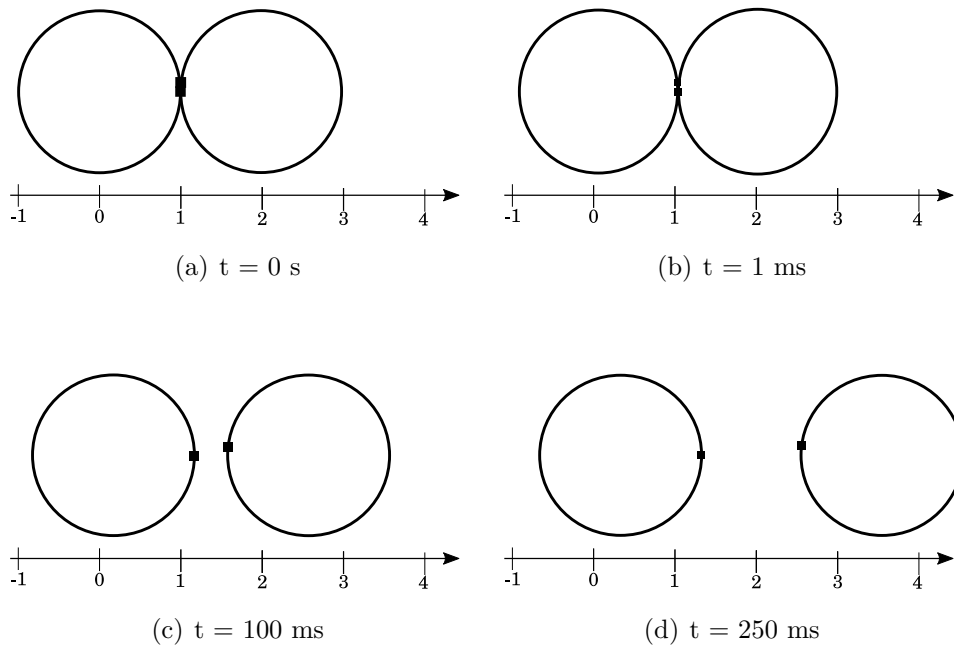


Figura 8: Configuração das estruturas anelares no tempo (duas estruturas anelares).

6.2 Impacto entre três anéis

Esse exemplo trata de três estruturas anelares iguais, inicialmente dispostas de acordo com a figura 9 e compostas pelas mesmas características físicas e geométricas do exemplo da seção 6.1. A estrutura à esquerda se movimenta com velocidade constante em direção as outras duas estruturas, de forma que ocorra colisões simultâneas e oblíquas em relação a direção do movimento. Para os resultados a seguir o passo de tempo foi de $\Delta t = 0,05ms$ e no início ocorre o contato entre as estruturas. Há restrição da posição dos nós da terceira estrutura (E3) na direção y , ou seja, não ocorre variação do valor da posição em y para os nós na demonstrados na figura 9.

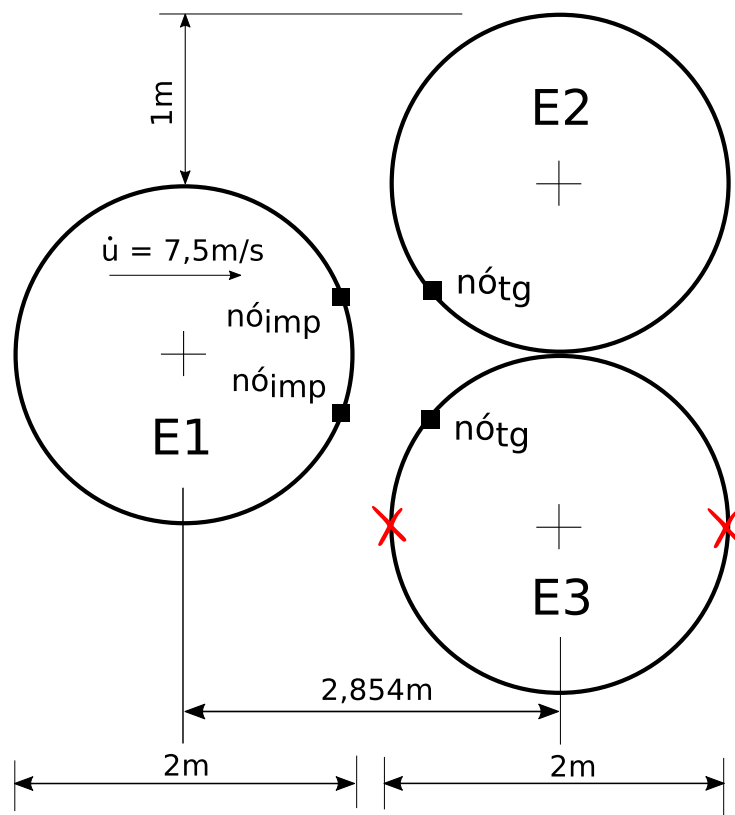
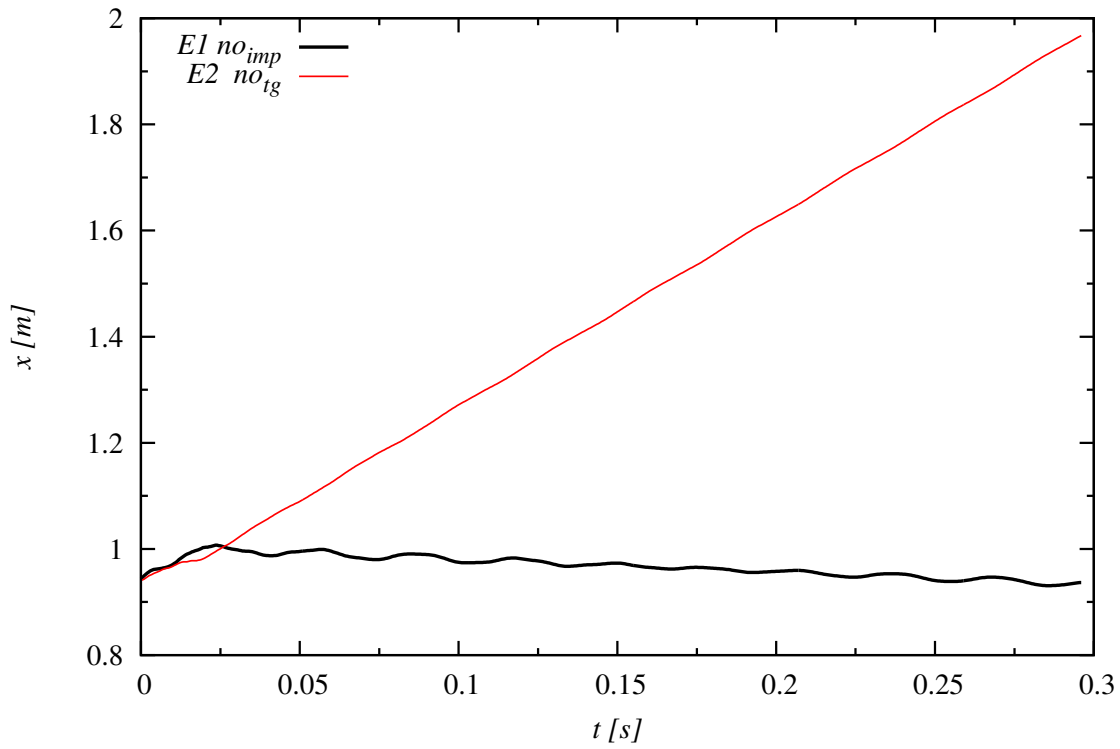
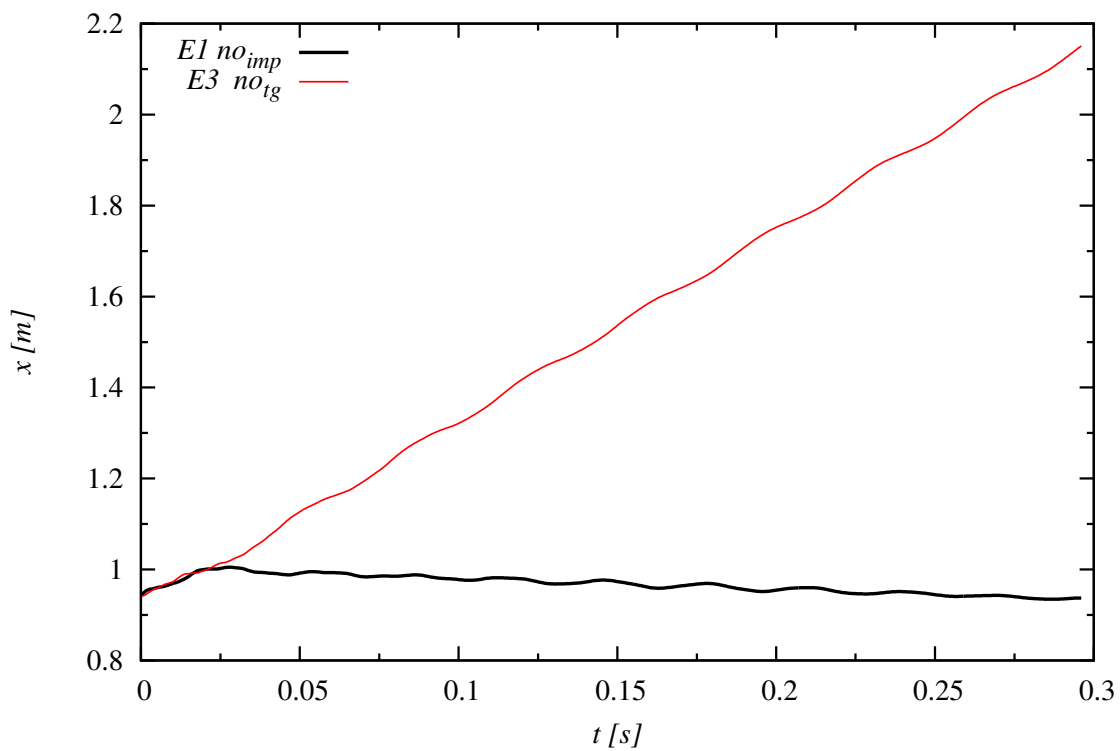


Figura 9: Geometria e cinemática inicial do problema (três estruturas anelares).

Nas figuras 10 e 11 exibem os resultados da posição dos nós impactante e alvo das três estruturas nas direções x e y , destacando a figura 11.(b), que os nós desta estrutura oscilam em torno de uma posição em y devido a restrição imposta.

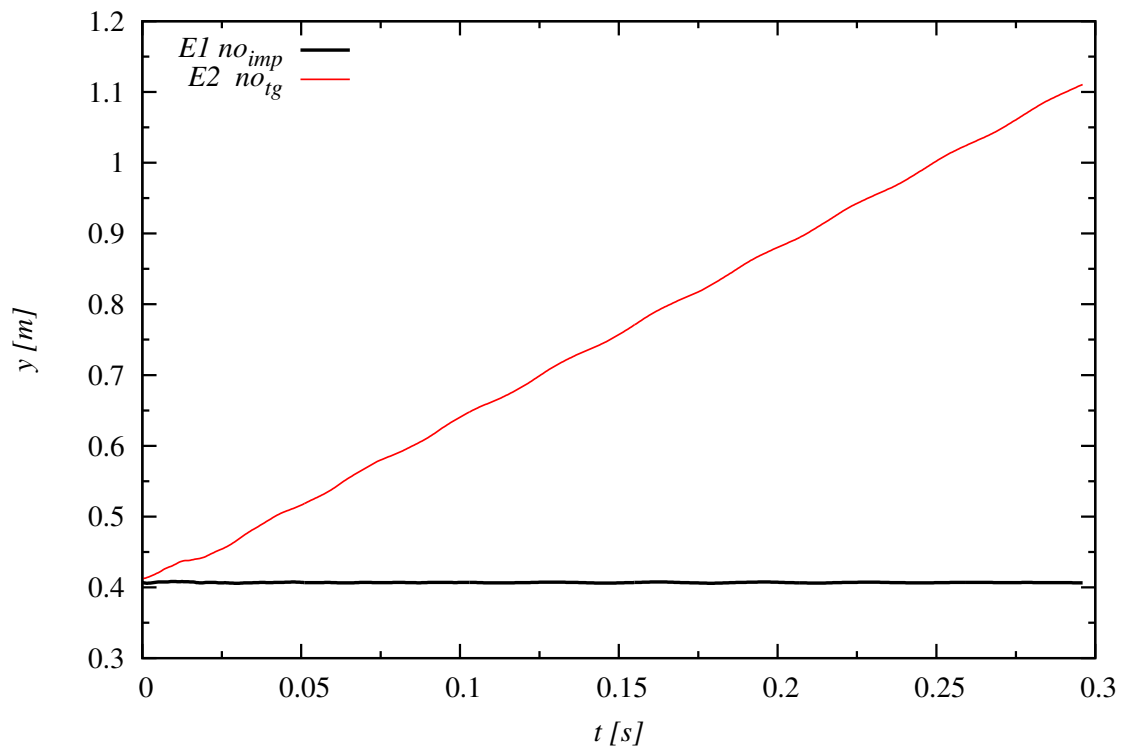


(a) Estrutura 1 e 2

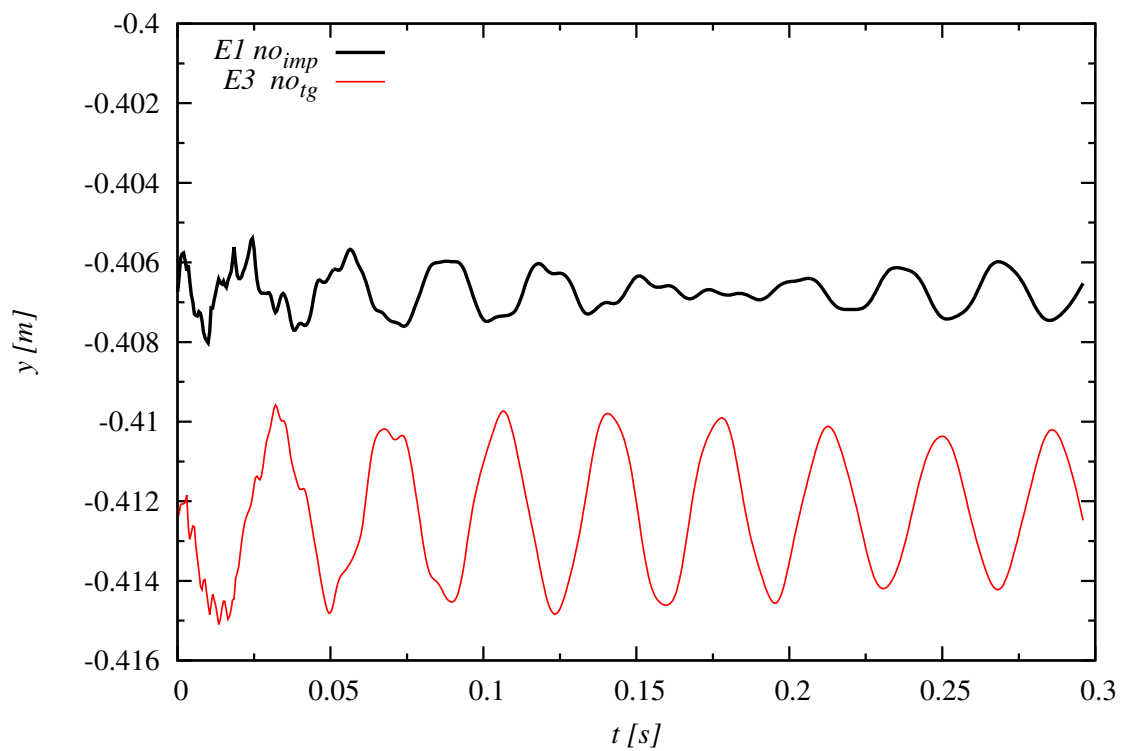


(b) Estruturas 1 e 3

Figura 10: Tempo x Posição na direção x dos nós impactante e alvo (três estruturas anelares).



(a) Estrutura 1 e 2



(b) Estruturas 1 e 3

Figura 11: Tempo x Posição na direção y dos nós impactante e alvo (três estruturas anelares).

6.3 Impacto entre três esferas

Na sequência, analisa-se o impacto entre três estruturas esféricas de casca iguais. Cada estrutura esférica consiste de 3395 nós e 754 elementos. A estrutura à esquerda se movimenta em velocidade constante em direção à estrutura alvo. As malhas esféricas estão distantes de $\delta = 0,01m$. As características iniciais geométricas e cinemáticas do problema se encontram nas figura 12. Considera-se o problema sem atrito, sendo módulo de Young $E = 210GPa$ igual para todas as estruturas, assim como a massa específica $\rho = 7700kg/m^3$, e espessura $e = 0,05m$. Para os resultados do problema o passo de tempo foi de $\Delta t = 0,003ms$ e o contato ocorre no início ($t = 0s$).

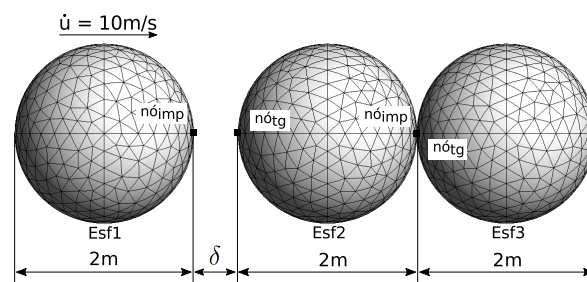


Figura 12: Geometria e cinemática inicial do problema.

Na figura 13 exibe-se os resultados do deslocamento dos nós impactante e alvo das três estruturas. Observa-se que o impacto acontece desde o começo da simulação e dura aproximadamente $\Delta t = 5ms$.

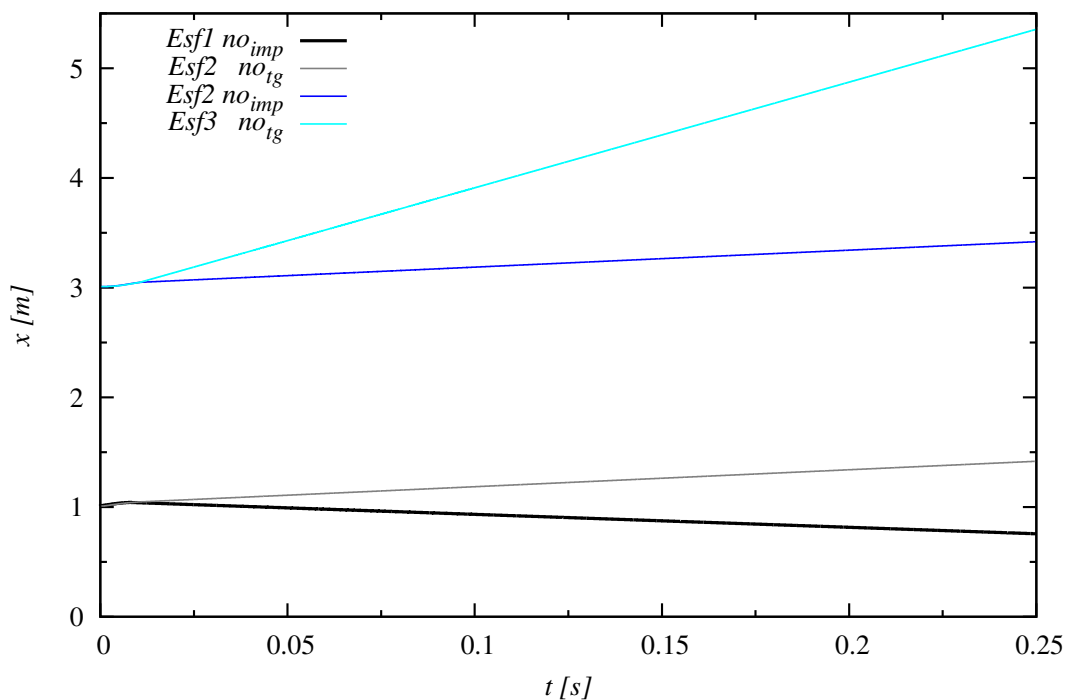


Figura 13: Tempo x Posição na direção x dos nós impactante e alvo (três estruturas esféricas).

A figura 14 mostra uma análise da velocidade durante a simulação em determinados instantes.

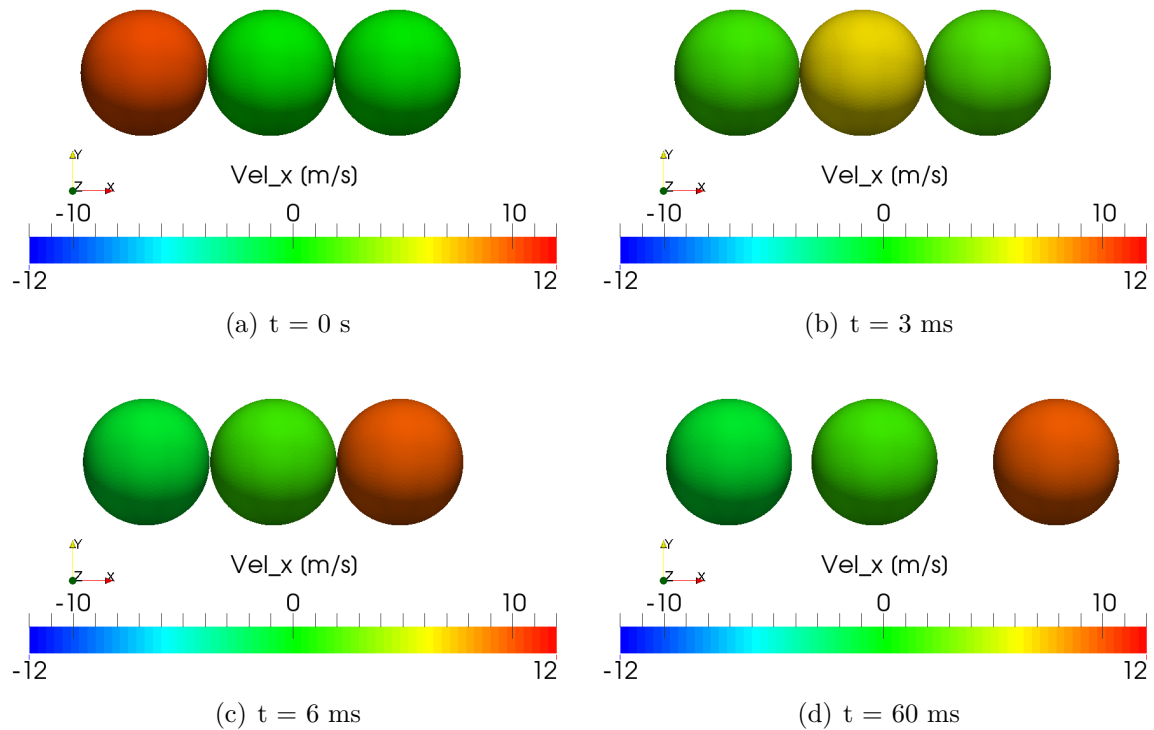


Figura 14: Análise da velocidade em determinados instantes.

Este exemplo numérico atesta que o programa desenvolvido tem potencialidade para realizar análises de problemas tridimensionais mais complexos.

7 CONCLUSÃO

No presente trabalho, desenvolveu-se e implementou-se um modelo capaz de realizar análises numéricas de impacto entre estruturas que possam ser modeladas por elementos finitos de casca. Utilizam-se elementos finitos isoparamétricos, de forma que é possível modelar superfícies inicialmente curvas das estruturas durante o impacto.

Emprega-se a formulação posicional conforme apresentado no trabalho de Sanches e Coda (2013) para análise das estruturas de casca submetidas a grandes deslocamento e pequenas deformações. Tal formulação emprega posições e componentes finais de vetores inicialmente normais à superfície média como parâmetros nodais, ao invés de deslocamentos e rotações.

A técnica utilizada para detecção do impacto é o uso das curvas de nível *level-set* de uma função distância assinalada, sendo que o nível 0 (zero) determina a região de intersecção. Aplica-se tal técnica numa malha de elementos triangulares de aproximação linear, devido a dificuldade de se calcular para malha de elementos cúbicos.

Para imposição da condição de não penetração, utilizou-se o método dos multiplicadores de Lagrange, que consiste em transformar o funcional com a aplicação de condições subsidiárias, de modo que, caso haja intersecção, a técnica seja aplicada na próxima iteração.

O presente modelo foi verificado através da comparação com os resultados obtidos por Greco (2004), obtendo-se boa concordância. Problemas mais complexos foram modelados atestando a robustez do modelo. Observa-se também grande potencial do presente trabalho para ser utilizado em diversas aplicações, como por exemplo, a análise de segurança de equipamentos de autoveículos ou a análise e otimização de ferramentas ou máquinas que envolva a interação de multicorpos.

Nota-se assim que os objetivos deste trabalho de conclusão de curso foram alcançados. Como temas para trabalhos futuros em continuidade a este, sugere-se a inclusão de forças de atrito, a inclusão de leis constitutivas que levem em conta a plastificação, modelos de dano e ou fratura.

Referências

- BERTSEKAS, D. P. *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. [S.l.]: Academic press, 2014.
- BIABANAKI, S.; KHOEI, A.; WRIGGERS, P. Polygonal finite element methods for contact-impact problems on non-conformal meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 269, p. 198 – 221, 2014. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782513002776>>.
- BOHN, B. et al. Analysis of car crash simulation data with nonlinear machine learning methods. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 18, p. 621–630, 2013.
- BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579 – 595, 2000. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782599004284>>.
- CHAN, S.; TUBA, I. A finite element method for contact problems of solid bodies—part i. theory and validation. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 13, n. 7, p. 615–625, 1971.
- CIRAK, F.; ORTIZ, M.; SCHRODER, P. Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 47, n. 12, p. 2039–2072, 2000.
- CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A new lagrangian-eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. In: SPRINGER. *IUTAM Symposium on Integrated Modeling of Fully Coupled Fluid Structure Interactions Using Analysis, Computations and Experiments*. [S.l.], 2003. p. 453–466.
- CODA, H. Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no mef. *Texto complementar para concurso de professor titular. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos*, 2003.
- CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures*, Latin American Journal of Solids and Structures, 6, n. 3, p. 187–212, Sep 2009. ISSN 1679-7817.
- CODA, H. B.; PACCOLLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, 40, n. 1, p. 185–200, Jun 2007. ISSN 0178-7675.
- CODA, H. B.; PACCOLLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 40, p. 185–200, 2007.
- CONRY, T. F.; SEIREG, A. A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 38, n. 2, p. 387–392, 1971.

- CRISFIELD, M.; MOITA, G. A unified co-rotational framework for solids, shells and beams. *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, n. 20–22, p. 2969 – 2992, 1996. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768395002529>>.
- FAROUGHI, S.; KHODAPARAST, H. H.; FRISWELL, M. I. Non-linear dynamic analysis of tensegrity structures using a co-rotational method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 69, p. 55 – 65, 2015. ISSN 0020-7462. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746214002376>>.
- FELIPPA, C. A. *A Tour of Nonlinear Analysis*. 2004. Notas de aula. Disponível em: <<http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/NFEM.d/NFEM.Ch02.d/NFEM.Ch02.pdf>>.
- FOX, R. L. *Optimization methods for engineering design*. [S.l.]: Addison-Wesley Pub. Co., 1971.
- FRANCAVILLA, A.; ZIENKIEWICZ, O. A note on numerical computation of elastic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 9, n. 4, p. 913–924, 1975.
- GRECO, M. *Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2004.
- GRECO, M.; CODA, H.; VENTURINI, W. An alternative contact/impact identification algorithm for 2d structural problems. *Computational Mechanics*, Springer, v. 34, n. 5, p. 410–422, 2004.
- HIRMAND, M.; VAHAB, M.; KHOEI, A. An augmented lagrangian contact formulation for frictional discontinuities with the extended finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 107, p. 28 – 43, 2015. ISSN 0168-874X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X15001262>>.
- HÖLLIG, K.; REIF, U.; WIPPER, J. Multigrid methods with web-splines. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 91, n. 2, p. 237–255, 2002.
- HU, N. A solution method for dynamic contact problems. *Computers & structures*, Elsevier, v. 63, n. 6, p. 1053–1063, 1997.
- HUGHES, T. J. et al. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 249–276, 1976.
- KIM, K.; LOMBOY, G. A co-rotational quasi-conforming 4-node resultant shell element for large deformation elasto-plastic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 44–47, p. 6502 – 6522, 2006. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782506000685>>.
- KOKO, J. Uzawa block relaxation domain decomposition method for a two-body frictionless contact problem. *Applied Mathematics Letters*, v. 22, n. 10, p. 1534 – 1538, 2009. ISSN 0893-9659. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965909001608>>.

- KRAUSE, R.; MOHR, C. Level set based multi-scale methods for large deformation contact problems. *Applied Numerical Mathematics*, v. 61, n. 4, p. 428 – 442, 2011. ISSN 0168-9274. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927410002072>>.
- LIN, W. Y.; HSIAO, K. M. Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly symmetric thin-walled beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 45, p. 6023 – 6052, 2007. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782501002122>>.
- MYŚLIŃSKI, A. Piecewise constant level set method for topology optimization of unilateral contact problems. *Advances in Engineering Software*, v. 80, p. 25 – 32, 2015. ISSN 0965-9978. Civil-Comp. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997814001690>>.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959.
- OGDEN, R. Non-linear elastic deformations. *Engineering Analysis*, v. 1, n. 2, p. 119 – 119, 1984. ISSN 0264-682X.
- PIEIDADE, D. N. *Sobre estratégias de resolução numérica de problemas de contato*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.
- SANCHES, R.; BORNEMANN, P.; CIRAK, F. Immersed b-spline (i-spline) finite element method for geometrically complex domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 200, n. 13, p. 1432–1445, 2011.
- SANCHES, R. A.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 259, n. 0, p. 177 – 196, 2013. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782513000480>>.
- SANCHES, R. A. K. *Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid-shell coupling using an arbitrary lagrangian-eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, n. 14, p. 3401 – 3418, 2014. ISSN 0307-904X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X13007610>>.
- SÁNCHEZ, J. A. G. *Uma formulação em elementos finitos para a análise dinâmica e estática não linear de risers incluindo o contato com o leito do mar*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Universidade de São Paulo, 2013.
- SECCHI, A. R. *COQ-897 Otimização de Processos*. 2015. Notas de aula. Disponível em: <<http://www2.peq.coppe.ufrj.br/Pessoal/Professores/Arge/COQ897/Otimiza.pdf>>.
- SIMO, J.; LAURSEN, T. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers Structures*, v. 42, n. 1, p. 97 – 116, 1992. ISSN 0045-7949. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004579499290540G>>.

- SIMO, J. et al. Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 23, n. 5, p. 779–800, 1986.
- SIMO, J. C.; HJELMSTAD, K. D.; TAYLOR, R. L. Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 42, n. 3, p. 301 – 330, 1984. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782584900112>>.
- TAYLOR, R. L.; PAPADOPOULOS, P. On a finite element method for dynamic contact/impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 36, n. 12, p. 2123–2140, 6 1993. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620361211>>.
- TONON, P.; CARRAZEDO, R.; SANCHES, R. A. Immersed normalized b-spline finite elements—a convergence study for 2d problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, v. 114, p. 57–67, 2016.
- WEYLER, R. et al. On the contact domain method: A comparison of penalty and lagrange multiplier implementations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 205–208, p. 68 – 82, 2012. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782511000120>>.
- WILLINGER, R.; KANG, H.-S.; DIAW, B. Three-dimensional human head finite-element model validation against two experimental impacts. *Annals of Biomedical Engineering*, Springer, v. 27, n. 3, p. 403–410, 1999.
- WRIGGERS, P.; LAURSEN, T. A. *Computational contact mechanics*. [S.l.]: Springer, 2006.
- ZAOUK, A. K. et al. Validation of a non-linear finite element vehicle model using multiple impact data. *ASME APPLIED MECHANICS DIVISION-PUBLICATIONS-AMD*, ASME, v. 218, p. 91–106, 1996.
- ZHANG, S.; LI, X. Boundary augmented lagrangian method for contact problems in linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 61, p. 127 – 133, 2015. ISSN 0955-7997. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799715001654>>.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method, v3: Fluid Dynamics*. [S.l.]: Butterworth-heinemann Linacre house, 2000. 334 p.