

Mauricio Pereira

Estudo das Tensões Residuais que Causam Descolamento em Interfaces de Fibras Ópticas

São Carlos, SP

Fevereiro 2017

Mauricio Pereira

Estudo das Tensões Residuais que Causam Descolamento em Interfaces de Fibras Ópticas

Estudo analítico e numérico das tensões
térmicas residuais em cilindros concêntricos.

Universidade de São Paulo – USP
Departamento de Engenharia de Estruturas

Orientador: Adair Roberto Aguiar

São Carlos, SP
Fevereiro 2017

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

P436e Pereira, Mauricio
 Estudo das Tensões Residuais que Causam
 Descolamento em Interfaces de Fibra Óptica / Mauricio
 Pereira; orientadora Adair Roberto Aguiar. São Carlos,
 2017.

 Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) --
 Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
 São Paulo, 2017.

 1. Termoelasticidade. 2. Tensões residuais. 3.
 transferência de calor. 4. axissimetria. 5. fibra
 óptica. I. Título.

FOLHA DE AVALIAÇÃO

Candidato: Mauricio Pereira

Título: Estudo das Tensões Residuais que Causam Descolamento de Interfaces em Fibra Ópticas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo
Curso de Engenharia Mecânica.

BANCA EXAMINADORA

Professor Associado Adair Roberto Aguiar (Orientador)

Nota atribuída: 10,0 (DEZ)

Adair R. Aguiar
(assinatura)

Professor Doutor Rodrigo Ribeiro Paccola

Nota atribuída: 10,0 (DEZ)

[Assinatura]
(assinatura)

Pós-Doutorando Edmar Borges Theóphilo Prado

Nota atribuída: 10,0 (DEZ)

[Assinatura]
(assinatura)

Média: 10 (DEZ)

Resultado: Aprovado

Data: 15/02/2017

Este trabalho tem condições de ser hospedado no Portal Digital da Biblioteca da EESC

SIM NÃO Visto do orientador

Adair R. Aguiar

Resumo

No processo de fabricação de fibras ópticas são aplicadas camadas poliméricas sobre a sílica fundida para melhorar suas propriedades ópticas e mecânicas. O processo de cura das camadas poliméricas é realizado por exposição à radiação UV, elevando a temperatura da fibra. Quando a fibra é resfriada até a temperatura ambiente, surgem tensões térmicas residuais devido à incompatibilidade das propriedades termoelásticas do núcleo de sílica e das camadas poliméricas. Tensões residuais podem levar ao descolamento da interface fibra-polímero, ou, ao aumento da perda da informação transmitida pela fibra pelo fenômeno de microflexão.

No presente trabalho abordamos o problema termoelástico de um cilindro circular finito reforçado sujeito a condições de contorno de Dirichlet. A distribuição de temperatura e o campo de deslocamento são admitidos desacoplados. A distribuição de temperatura transiente é determinada analiticamente utilizando separação de variáveis, e numericamente utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) para discretização espacial e o método de Euler implícito para discretização temporal. Os resultados numérico e analítico estão em boa concordância, validando a implementação numérica.

O campo de deslocamento e os campos de deformação e de tensão associados são determinados numericamente utilizando o MEF. As tensões resultantes foram comparadas com as fornecidas pelo software comercial de elementos finitos Abaqus e apresentaram boa concordância. Foi também realizado estudo de convergência da tensão refinando-se a malha utilizada.

Palavras-chave: termoelasticidade. tensões residuais. transferência de calor. axissimetria. fibra óptica.

Abstract

In the fabrication of optical fibers, polymer layers are applied over the fused silica core to improve its opto-mechanical properties. The polymer curing process is induced by UV radiation in a high temperature process. When the fiber is cooled down to room temperature, residual thermal stresses will be present due to the mismatch of thermomechanical properties of the glass core and the polymeric layers. Residual thermal stresses may lead to the debonding of the glass-polymer interface or, to an increasing loss of transmitted information by the fibers due to the microbending effect.

In the present work, the thermoelastic problem of a finite multi-layer circular cylinder subjected to Dirichlet boundary conditions is considered. The temperature distribution and the displacement field are assumed to be decoupled. The transient temperature distribution is determined both analytically, using the separation of variables, and numerically using the Finite Element Method (FEM). The FEM was used for the spatial discretization while the backward Euler method was used for time discretization. The analytical and numerical results were in good agreement, benchmarking the implemented numerical method.

The displacement field and the associated strain and stress fields were numerically determined using FEM. The resulting stresses were compared with those obtained by the FEM commercial software Abaqus and both results were in good agreement. A convergence study of the stress distribution was also carried, through mesh refinement.

Keywords: thermoelasticity. residual stress. heat transfer. axisymmetry. optical fiber.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Configuração típica da fibra óptica com núcleo de vidro e duas camadas de recobrimento.	27
Figura 2 – Elemento quadrilateral genérico.	47
Figura 3 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-3}s$ em $z = 0$	56
Figura 4 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-3}s$ em $z = 2.4mm$	56
Figura 5 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-3}s$ em $z = 5mm$	57
Figura 6 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-2}s$ em $z = 0$	57
Figura 7 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-2}s$ em $z = 2.4mm$	58
Figura 8 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-2}s$ em $z = 5mm$	58
Figura 9 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-3}s$ em $z = 0$	58
Figura 10 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-3}s$ em $z = 2.4mm$	59
Figura 11 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-3}s$ em $z = 5mm$	59
Figura 12 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-2}s$ em $z = 0$	59
Figura 13 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-2}s$ em $z = 2.4mm$	60
Figura 14 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-2}s$ em $z = 5mm$	60
Figura 15 – Tensão radial σ_r para $\Delta T = 10^\circ C$ em $z = 0$	62
Figura 16 – Tensão longitudinal σ_z para $\Delta T = 10^\circ C$ em $z = 0$	62
Figura 17 – Tensão tangencial σ_T para $\Delta T = 10^\circ C$ em $z = 0$	63
Figura 18 – Tensão cisalhante σ_{rz} para $\Delta T = 10^\circ C$ em $z = 0$	63
Figura 19 – Convergência da tensão radial σ_r para $\Delta T = 10^\circ C$ em $z = 0$ com $nz = 20$	64
Figura 20 – Convergência da tensão longitudinal σ_z para $\Delta T = 10^\circ C$ em $z = 0$ com $nz = 20$	64
Figura 21 – Convergência da tensão tangencial σ_T para $\Delta T = 10^\circ C$ em $z = 0$ com $nz = 20$	65
Figura 22 – Convergência da tensão cisalhante σ_{rz} para $\Delta T = 10^\circ C$ em $z = 0$ com $nz = 20$	65
Figura 23 – Convergência da tensão radial σ_r para $\Delta T = 10^\circ C$ em $z = 0$ com $nr = 24$	66

Figura 24 – Convergência da tensão longitudinal σ_z para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $nr = 24$	66
Figura 25 – Convergência da tensão tangencial σ_T para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $nr = 24$	67
Figura 26 – Convergência da tensão cisalhante σ_{rz} para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $nr = 24$	67
Figura 27 – Distribuição de temperatura na fibra óptica para alguns valores de tempo.	68
Figura 28 – Distribuição da tensão radial na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 0$	69
Figura 29 – Distribuição da tensão radial na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 375\mu\text{m}$	70
Figura 30 – Distribuição da tensão longitudinal na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 0$	70
Figura 31 – Distribuição da tensão longitudinal na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 375\mu\text{m}$	71
Figura 32 – Distribuição da tensão tangencial na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 0$	71
Figura 33 – Distribuição da tensão tangencial na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 375\mu\text{m}$	72

Lista de tabelas

Tabela 1 – Propriedades térmicas dos materiais do cilindro composto.	55
Tabela 2 – Propriedades dos materiais do cilindro composto.	61
Tabela 3 – Propriedades térmicas dos materiais do cilindro composto.	68

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Fundamentos da termoelasticidade linear	17
1.1.1	Elasticidade linear clássica	17
1.1.2	Termodinâmica	18
1.1.3	Segunda lei da termodinâmica	20
1.1.4	Relação tensão-deformação e equação de energia para sólido elástico isotrópico	21
1.1.5	Teoria termoelástica desacoplada	24
1.1.6	Axissimetria	25
2	TRANSFERÊNCIA DE CALOR	27
2.1	Formulação do problema	27
2.2	Solução analítica	28
2.2.1	Superfície ∂B_1	29
2.2.2	Superfícies ∂B_2 e ∂B_3	33
2.2.3	Solução transiente	37
2.2.4	Relações de ortogonalidade	40
2.3	Solução numérica	43
2.3.1	Formulação clássica	43
2.3.2	Formulação variacional	43
2.3.3	Formulação de Galerkin	45
2.3.4	Funções de forma	45
2.3.5	Transformação bilinear	48
2.3.6	Discretização no tempo	49
3	TERMOELASTICIDADE	51
3.1	Solução numérica	51
3.1.1	Formulação de Galerkin	52
3.1.2	Formulação no elemento	53
3.1.3	Deformações	54
3.1.4	Tensões	54
4	METODOLOGIA E RESULTADOS	55
4.1	Problema térmico	55
4.1.1	Solução analítica	55
4.1.2	Comparação entre a solução analítica e numérica	56

4.2	Comparação da solução numérica com solução de software comercial	57
4.2.1	Modelagem no Abaqus	61
4.2.2	Resultados numéricos	61
4.3	Distribuição de temperatura e tensão na fibra óptica	68
5	CONCLUSÃO	73
	Referências	75

1 Introdução

No processo de fabricação de fibra óptica, são aplicadas camadas poliméricas sobre a sílica para melhorar suas propriedades opto-mecânicas (BROWN; HOFFMAN, 2001). A cura das camadas poliméricas é feita por exposição à radiação UV, o que causa aumento da temperatura no material. Após o resfriamento até a temperatura ambiente, surgem tensões residuais térmicas devido a diferença nas propriedades termoelásticas da sílica e das camadas poliméricas.

Tensões residuais podem levar ao descolamento da interface fibra-polímero (PARLEVLIET; BEUKERS, 2006) e conseqüente inutilização da fibra óptica. Mesmo que não ocorra o descolamento interfacial, a presença de tensões elevadas aumenta a perda de informação na fibra pelo fenômeno de microflexão (SHIUE; SHEN, 2005). Assim, o estudo das tensões residuais térmicas é relevante para o projeto adequado de fibras ópticas.

O problema das tensões térmicas residuais em cilindros circulares concêntricos foi considerado por Bolotin e Bolotina (1967) com aplicação em fibras de vidro reforçadas com uma única camada polimérica. A fibra é considerada infinitamente longa, o modelo é unidimensional e utiliza resultados conhecidos da elasticidade linear como, por exemplo, as tensões em tubos apresentadas por Timoshenko e Goodier (1993).

Com a popularização da fibra óptica na década de 1970 (PALAIS, 1998), o estudo das tensões residuais decorrentes do processo de fabricação ganha ainda mais relevância. A fibra deve suportar carregamentos diversos, assim como operar em ambiente eventualmente corrosivo. Neste cenário, as tensões residuais desempenham papel fundamental na vida útil da fibra.

Um modelo proposto por Paek e Kurkjian (1975) para a determinação das tensões térmicas existentes em uma fibra óptica reforçada, durante e após o processo de extrusão, considera a fibra como um fluido incompressível viscoso. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são constantes e o coeficiente de expansão térmica e a viscosidade dependem da temperatura. Os autores supõem que as tensões de cisalhamento são nulas, de modo que as tensões principais dependem apenas da coordenada radial. Os autores consideram que a temperatura do processo de fabricação não é elevada e tensões residuais induzidas mecanicamente podem se tornar críticas. Estas tensões ocorrem quando a força de tração não é igualmente distribuída entre o núcleo e o revestimento, originando tensões residuais no material após o resfriamento.

Devido à similaridade geométrica, a modelagem apresentada para a fibra óptica é próxima da apresentada para cilindros circulares multi-camadas compostos de outros materiais.

Um modelo das tensões principais em um sistema composto por diversos cilindros coaxiais é apresentado por [Warwick \(1991\)](#) com aplicação em filamentos de carbetto de silício. Estas fibras reforçadas podem, posteriormente, ser inseridas em uma matriz e as tensões residuais podem induzir a formação de trincas na interface fibra-matriz. Este estudo apresenta o diferencial de considerar um número arbitrário de camadas de reforço. O trabalho aborda apenas materiais cerâmicos e metálicos, e não considera efeitos viscoelásticos que, em geral, são significativos em sistemas poliméricos ([FERRY, 1980](#)).

Em [Shiue e Lee \(1997\)](#), são consideradas as tensões térmicas em uma fibra óptica revestida com carbono. O modelo é unidimensional e utiliza conceitos fundamentais da elasticidade linear. Uma vantagem da utilização do recobrimento de carbono é a melhora da performance mecânica da fibra no longo prazo. Os autores concluem que são necessários um aumento da espessura da camada de carbono e uma diminuição do seu coeficiente de Poisson e coeficiente de expansão térmica efetivos para uma aplicação adequada em fibras ópticas.

Além da aplicação em transmissão de informação, fibras de vidro podem ser utilizadas para transmissão de alta potência como, por exemplo, em lasers. Um estudo da distribuição de temperatura e tensão em uma fibra de vidro com duas camadas de revestimento para este tipo de aplicação é apresentado por [Brown e Hoffman \(2001\)](#). É considerada a geração de calor uniforme no núcleo da fibra e as propriedades termomecânicas dos recobrimentos são similares, pois, também são fabricadas de vidro. É comentado que em alguns lasers o recobrimento é feito com materiais poliméricos, em cujo caso é sugerido o uso do MEF para a determinação da distribuição de temperatura e tensão. Para esta aplicação em particular, a utilização de recobrimentos poliméricos pode ser problemática pois há diminuição da dissipação térmica e a temperatura no núcleo torna-se muito elevada. Neste artigo, os autores abordam apenas os lasers compostos de vidro.

Para a utilização em sistemas de comunicação de baixa potência o recobrimento das fibras ópticas é normalmente composto de duas ou mais camadas poliméricas ([SHIUE; LEE, 1997](#)). O recobrimento polimérico fornece melhor resistência mecânica no curto prazo, a qual pode se degradar no longo prazo sob condições de alta umidade. O vidro, apesar de ser inerte e, em geral, apresentar boa resistência à corrosão, é particularmente suscetível à corrosão sob tensão na presença de água ([WIEDERHORN; BOLZ, 1970](#)). Deseja-se evitar, portanto, o contato do vapor de água com o núcleo de sílica. Para minimizar este risco, um modelo de fibra óptica reforçada por recobrimentos metálicos é apresentado por [Shiue, Pan e Hsiao \(2002\)](#). O recobrimento metálico impede que a umidade atinja o núcleo. Neste estudo a superfície externa da fibra está sujeita a pressão hidrostática, diferente dos casos apresentados anteriormente, em que a superfície externa é livre de tensões. Tanto a presença de tensões térmicas residuais quanto da

pressão externa causam aumento na perda de informação transmitida pela fibra. O modelo utilizado é baseado na teoria de elasticidade linear clássica ([TIMOSHENKO; GOODIER, 1993](#)).

[Shiue e Shen \(2005\)](#) realizam estudo do efeito de carregamentos térmicos cíclicos na vida útil da fibra óptica. Os autores utilizam a teoria viscoelástica linear para a determinação da tensão térmica residual em fibras ópticas com duas camadas poliméricas. O modelo de material de Maxwell é utilizado para modelar o comportamento viscoelástico dos polímeros. Fundamentos da mecânica da fratura elástica linear também foram utilizados para determinar a taxa de crescimento das trincas presentes no material. Os autores concluem que a vida útil da fibra depende principalmente das tensões de tração. Além disso, tensões térmicas aceleram o processo de falha de fibras ópticas revestidas e devem, portanto, ser minimizadas.

Na revisão bibliográfica apresentada acima, há foco no estudo das tensões de tração que podem induzir ao descolamento da interface. A delaminação também pode ocorrer devido a tensões cisalhantes se estas forem superiores às forças adesivas presentes na interface fibra-polímero. Em [Shiue et al. \(2006\)](#) é realizado o estudo teórico da delaminação na interface fibra-polímero induzida por tensão cisalhante. Realizam estudo experimental sobre o efeito da temperatura e umidade na resistência ao cisalhamento da interface fibra-polímero ([CHEN; SHIUE, 2006](#)). Os autores deste último trabalho concluem que a resistência da fibra é determinada apenas pela quantidade de vapor na interface sílica-polímero, sendo governada, portanto, pela difusão de vapor d'água através das camadas poliméricas.

A maior parte dos modelos apresentados baseiam-se na elasticidade linear clássica e, em geral, são unidimensionais. Os campos de temperatura e de deslocamento são desacoplados. Os modelos mais completos levam em conta o caráter viscoelástico dos polímeros que recobrem a fibra óptica, muito embora poucos autores tenham considerado este efeito. A distribuição de temperatura é considerada uniforme e em regime permanente na maioria dos estudos. Os recobrimentos são considerados isotrópicos, ou, transversalmente isotrópicos. Neste último ponto, um modelo mais completo é apresentado por [Tsukrov e Drach \(2010\)](#), em que a solução analítica para o campo de deslocamento de um cilindro multi-camadas finito composto de camadas cilíndricamente ortotrópicas é obtido. A solução foi determinada para condições de contorno homogêneas. Este modelo tem aplicação, por exemplo, em nanofios, modelagem de defeitos interfaciais e compósitos carbono-carbono fabricados por infiltração química em fase vapor.

O modelo de cilindro multi-camadas concêntricas pode ser utilizado também no estudo da deformação em nanofios onde a incompatibilidade no arranjo cristalino origina deformação residual. Por exemplo, estado de tensão e deformação tridimensional de um cilindro finito composto de núcleo e camada é apresentado em [Revenko \(2014\)](#).

Diante do exposto acima, parece evidente que o estudo da distribuição de tensão em cilindros multi-camadas é relevante e atual. Este estudo possui aplicações diversas, com conexão direta no modelamento de fibras ópticas, fibras reforçadas e nanofios recobertos.

A motivação tecnológica do presente trabalho é o efeito das tensões residuais térmicas em fibras ópticas compostas de um núcleo de sílica e recobrimento de duas camadas poliméricas. Este efeito é estudado como caso particular do problema mais geral da distribuição de temperatura em cilindros circulares finitos com número arbitrário de camadas e determinação da tensão residual correspondente.

Na seção 1.1 são introduzidos os fundamentos da termoelasticidade, assim como as hipóteses simplificadoras utilizadas neste trabalho, tais como o desacoplamento dos campos de temperatura e deslocamento e a axissimetria. O desacoplamento dos campos de temperatura e deslocamento permite que a distribuição de temperatura seja determinada sem o conhecimento do campo de deslocamento. No capítulo 2, a distribuição de temperatura foi determinada analítica e numericamente. O problema a ser resolvido é definido na seção 2.1, e a solução analítica é obtida ao longo da seção 2.2 utilizando a separação de variáveis. Na seção 2.3 a solução numérica é obtida utilizando o MEF.

Conhecido o campo de temperatura, é possível determinar o campo de deslocamento. No capítulo 3, a solução numérica para o campo de deslocamento de um cilindro livre de tensões superficiais e forças de corpo é obtida, assumindo uma distribuição de temperatura conhecida. A metodologia utilizada para o cálculo dos campos de deformação e tensão também é apresentada no capítulo 3.

No capítulo 4, é introduzida a metodologia utilizada para validação dos métodos numéricos implementados, assim como os resultados pertinentes a esta validação. As distribuições de temperatura e tensão na fibra óptica são apresentadas na seção 4.3. Conclusões sobre a implementação dos métodos numéricos e os resultados obtidos são apresentados no Capítulo 5.

1.1 Fundamentos da termoelasticidade linear

A termoelasticidade abrange fenômenos relativos à condução de calor e às tensões e deformações resultantes do fluxo de calor. A teoria é estabelecida a partir dos fundamentos da termodinâmica e da mecânica dos meios contínuos. Ao final desta seção, é estabelecida a equação da energia da termoelasticidade linear clássica. Também são introduzidas as hipóteses adotadas para a simplificação das equações tendo em vista a modelagem da fibra óptica.

1.1.1 Elasticidade linear clássica

Seja $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$ um corpo de densidade ρ constante e seja $\partial\mathcal{B}$ a superfície externa de \mathcal{B} . Seja também $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ o deslocamento do ponto $\mathbf{x} \in \mathcal{B} \cup \partial\mathcal{B}$. A velocidade do ponto \mathbf{x} é dada por $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, em que $(\dot{\bullet})$ denota diferenciação no tempo.

Atua sobre \mathcal{B} a força de corpo \mathbf{f} . Todo ponto em $\partial\mathcal{B}$ está sujeito a uma tensão $\mathbf{S}^{(\mathbf{n})}$, em que \mathbf{n} é o versor externo a $\partial\mathcal{B}$. As componentes de $\mathbf{S}^{(\mathbf{n})}$ são dadas por

$$S_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij}n_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

em que se considera soma implícita no índice $j = 1, 2, 3$, e σ_{ij} são as componentes do tensor tensão.

Da elasticidade linear clássica temos o tensor deformação infinitesimal, dado por

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.2)$$

Temos também que a equação diferencial de equilíbrio é dada por

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \dot{v}_i, \quad (1.3)$$

em que f_i é a i -ésima componente da força de corpo \mathbf{f} , e v_i a i -ésima componente de \mathbf{v} .

A conservação do momento é satisfeita se o tensor tensão for simétrico, isto é, $\sigma^T = \sigma$.

Na termoelasticidade, a relação entre a deformação térmica e as tensões associadas será estabelecida a partir dos princípios da termodinâmica, utilizando-se do balanço de energia e de uma equação constitutiva do material, conforme será apresentado na seção a seguir. Neste trabalho, a classe de materiais de interesse são os materiais elásticos lineares isotrópicos.

1.1.2 Termodinâmica

No tratamento da termodinâmica será utilizado o conceito de variáveis de estado X_α , $\alpha = 1 \dots m + n$, com m, n naturais. Sejam n dessas variáveis independentes. Então $X_\alpha = f_\alpha(X_1, \dots, X_n)$, $\alpha = n + 1 \dots n + m$, são funções ou equações de estado.

A lei zero da termodinâmica afirma que se um corpo A está em equilíbrio termodinâmico com um corpo C, e um corpo B está em equilíbrio termodinâmico com o mesmo corpo C, então A e B estão em equilíbrio termodinâmico entre si.

Escrever este requisito em termos de funções de estado implica na existência de uma função que atinge o mesmo valor nos diferentes corpos dadas as mesmas variáveis de estado. A essa função θ se denomina temperatura empírica.

A potência mecânica aplicada sobre o corpo \mathcal{B} é dada por

$$\dot{W}(t) = \int_{\mathcal{B}} \rho f_i(t) v_i dV + \int_{\partial \mathcal{B}} S_i^{(n)} v_i dA. \quad (1.4)$$

A energia interna U é uma função de estado que corresponde ao trabalho adiabático realizado sobre o corpo. Se o trabalho não for adiabático, então o aumento, em excesso, da energia interna se deve a introdução de calor no sistema. Assim, a primeira lei da termodinâmica toma a forma

$$dU = dW + dQ, \quad (1.5)$$

em que dU é o diferencial de energia interna, dW é o diferencial do trabalho e dQ é o diferencial do calor.

Em um sistema não homogêneo, trabalha-se com as densidades de funções de estado. Seja $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}, t)$ a densidade de energia interna.

A energia cinética do corpo \mathcal{B} é dada por

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho v_i v_i dV \quad (1.6)$$

e a energia interna por

$$U = \int_{\mathcal{B}} \rho \varepsilon dV. \quad (1.7)$$

A potência mecânica expressa em (1.4) pode ser reescrita como

$$\dot{W} = \dot{W}_F + \dot{W}_\sigma, \quad (1.8)$$

em que $\dot{W}_F = \int_{\mathcal{B}} \rho f_i v_i dV$ é a potência mecânica das força externa \mathbf{f} e $\dot{W}_\sigma = \int_{\partial \mathcal{B}} \sigma_{ij} n_j v_i dA$ é a potência de tensão.

Seja $\dot{Q} = - \int_{\partial \mathcal{B}} q dA$ a energia transferida para \mathcal{B} através de $\partial \mathcal{B}$, em que q é a magnitude do fluxo de calor $\mathbf{q} = q\mathbf{n}$, e \mathbf{n} o versor externo a $\partial \mathcal{B}$. A taxa de calor \dot{Q} transferido ao

corpo \mathcal{B} mais o trabalho realizado sobre \mathcal{B} , pela conservação da energia, são iguais a soma da taxa de variação da energia interna U e da energia cinética K . Assim, neste trabalho, a expressão da conservação da energia toma a forma

$$\frac{d}{dt}(K + U) = \dot{W}_F + \dot{W}_\sigma + \dot{Q},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho v_i v_i dV + \int_{\mathcal{B}} \rho \varepsilon dV \right) = \int_{\partial \mathcal{B}} \sigma_{ij} n_j v_i dA + \int_{\mathcal{B}} \rho f_i v_i dV - \int_{\partial \mathcal{B}} q dA.$$

Como as deformações são infinitesimais, admite-se que o domínio de integração varia pouco no tempo e a equação acima é reescrita como

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \dot{v}_i v_i dV + \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\varepsilon} dV = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) dV + \int_{\mathcal{B}} \rho f_i v_i dV - \int_{\partial \mathcal{B}} q dA. \quad (1.9)$$

Como a superfície $\partial \mathcal{B}$ é arbitrária, pode-se tomar qualquer superfície na integral, o que implica na existência de um fluxo de calor, através de qualquer elemento de superfície, dado por $q = q_i n_i$, onde n_i são as componentes do vetor \mathbf{n} externo à superfície escolhida.

Utilizando o teorema da divergência, pode-se reescrever o balanço de energia (1.9) como

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \dot{v}_i v_i dV + \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\varepsilon} dV = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) dV + \int_{\mathcal{B}} \rho f_i v_i dV - \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV, \quad (1.10)$$

em que q_i é a componente de \mathbf{q} em coordenadas cartesianas.

Reordenando os elementos em (1.10), resulta

$$\int_{\mathcal{B}} v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i - \rho \dot{v}_i \right) dV + \int_{\mathcal{B}} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \rho \dot{\varepsilon} \right) dV = 0. \quad (1.11)$$

Da equação de equilíbrio (1.3), segue que o primeiro integrando em (1.11) é nulo. Além disso, uma vez que o corpo \mathcal{B} é arbitrário, devemos ter para todos os pontos $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ que

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \rho \dot{\varepsilon} = 0. \quad (1.12)$$

Decompondo $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ em componentes simétrica e anti-simétrica, segue que

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij}, \quad (1.13)$$

em que

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

Note, do início da seção 1.1.1 que $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ e que, portanto, $v_i = \dot{u}_i$.

Introduzindo (1.13) em (1.12), resulta

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \rho\dot{\epsilon}, \quad (1.14)$$

que corresponde à conservação de energia em sistemas não homogêneos. Note que $\sigma_{ij}\dot{w}_{ij} = 0$ pois σ_{ij} é simétrico e \dot{w}_{ij} anti-simétrico.

1.1.3 Segunda lei da termodinâmica

Para a consideração da segunda lei da termodinâmica aplicada aos meios contínuos sob deformações infinitesimais, considere separadamente aquelas deformações elásticas das deformações dissipativas, como, por exemplo, deformações viscoelásticas. Considere as variáveis de estado de deformação ξ_α , $\alpha = 1 \dots n$, e as variáveis de estado de deformação dissipativa d_μ , $\mu = 1 \dots m$, de modo que

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = S_\mu\dot{d}_\mu + \sigma_\alpha\dot{\xi}_\alpha, \quad (1.15)$$

em que S_μ é a componente do tensor tensão associada à variável de estado de deformação dissipativa d_μ , $\mu = 1 \dots m$, e σ_α é a componente do tensor tensão associada à variável de estado de deformação ξ_α , $\alpha = 1 \dots n$.

As variáveis de estado de deformação podem ser tomadas, por exemplo, como as componentes do tensor de deformação infinitesimal

$$\xi_\alpha = \epsilon_{ij}, \quad \alpha = 1 \dots 6, i, j = 1, 2, 3. \quad (1.16)$$

Introduzindo na expressão da conservação da energia (1.14), segue que

$$S_\mu\dot{d}_\mu + \sigma_\alpha\dot{\xi}_\alpha - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \rho\dot{\epsilon}, \quad \alpha = 1 \dots n, \mu = 1 \dots m. \quad (1.17)$$

O teorema de Carathéodory (BOLEY; WEINER, 1960) permite escrever, a partir da equação acima, as seguintes expressões

$$\sigma_\alpha\dot{\xi}_\alpha + \rho T\dot{\eta} = \rho\dot{\epsilon}, \quad \alpha = 1 \dots n, \quad (1.18)$$

$$S_\mu\dot{d}_\mu - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \rho T\dot{\eta}, \quad \mu = 1 \dots m, \quad (1.19)$$

em que η é a densidade de entropia e T uma medida de temperatura empírica.

Reescrevendo a equação (1.19) na forma

$$\rho\dot{\eta} = \frac{S_\mu\dot{d}_\mu}{T} - \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i},$$

e integrando sobre \mathcal{B} , obtemos

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\eta} dV = - \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} \right) dV - \int_{\mathcal{B}} \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} dV + \int_{\mathcal{B}} \frac{S_\mu \dot{d}_\mu}{T} dV \quad (1.20)$$

O segundo e terceiro termos do lado direito da equação (1.20) compõem a taxa de geração de entropia, dada por

$$\rho \dot{\eta}_1 = - \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{S_\mu \dot{d}_\mu}{T}. \quad (1.21)$$

O postulado da termodinâmica afirma que $\dot{\eta}_1 \geq 0$. Renomeando as variáveis como

$$q_i = S_\mu, \quad (1.22)$$

$$- \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \dot{d}_\mu, \quad (1.23)$$

com $i = 1, 2, 3$ e $\mu = m + 1, m + 2, m + 3$, respectivamente, resulta

$$\rho \dot{\eta}_1 = \frac{S_\mu \dot{d}_\mu}{T} \geq 0, \quad \mu = 1, \dots, m + 3. \quad (1.24)$$

1.1.4 Relação tensão-deformação e equação de energia para sólido elástico isotrópico

Neste trabalho é utilizada a relação tensão-deformação de um sólido elástico isotrópico no regime linear elástico. Assim, o desenvolvimento a seguir se aplica a pequenas deformações e pequenas variações de temperatura.

Seja a função energia livre

$$\varphi(\epsilon_{ij}, T) = \varepsilon(\epsilon_{ij}, T) - T\eta(\epsilon_{ij}, T). \quad (1.25)$$

Introduzindo (1.16) na expressão (1.18) e rearranjando os termos, fornece

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \rho T \dot{\eta} = \rho \dot{\varepsilon},$$

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \rho(\dot{\varepsilon} - T \dot{\eta}). \quad (1.26)$$

Introduzindo agora a função energia livre (1.25) na expressão (1.26) e derivando com relação ao tempo, resulta

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \dot{\epsilon}_{ij} - \rho \left(\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \right) \dot{T} = 0. \quad (1.27)$$

Assumindo que $\dot{\epsilon}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ e \dot{T} são arbitrários e independentes dos coeficientes na expressão acima, segue que

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad (1.28)$$

$$\eta = -\frac{\partial \varphi}{\partial T}. \quad (1.29)$$

Para sólidos isotrópicos, pode-se escrever a função energia livre em termos dos invariantes do tensor de deformação infinitesimal e da temperatura

$$\varphi(\epsilon_{ij}, T) = \varphi(\mathbb{I}_\epsilon, \mathbb{III}_\epsilon, \mathbb{IIII}_\epsilon, T), \quad (1.30)$$

Os invariantes são dados por

$$\mathbb{I}_\epsilon = \epsilon_{ii}, \quad (1.31)$$

$$\mathbb{III}_\epsilon = \frac{1}{2!} \delta_{lm}^{ij} \epsilon_{il} \epsilon_{jm}, \quad (1.32)$$

$$\mathbb{IIII}_\epsilon = \frac{1}{3!} \delta_{lmn}^{ijk} \epsilon_{il} \epsilon_{jm} \epsilon_{kn}, \quad (1.33)$$

em que $\delta_{lm}^{ij} = \gamma_{ijk} \gamma_{lmk}$ e $\delta_{lmn}^{ijk} = \gamma_{ijk} \gamma_{lmn}$ são deltas de Kroenecker generalizados, e

$$\gamma_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } ijk \text{ é uma permutação par de } 123, \\ 0 & \text{se quaisquer dos índices } ijk \text{ são iguais,} \\ -1 & \text{se } ijk \text{ é uma permutação ímpar de } 123. \end{cases} \quad (1.34)$$

Segue das expressões (1.28) e (1.31)-(1.34) que

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_{ij}} = \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbb{I}_\epsilon} \frac{\partial \mathbb{I}_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbb{III}_\epsilon} \frac{\partial \mathbb{III}_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbb{IIII}_\epsilon} \frac{\partial \mathbb{IIII}_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} \right). \quad (1.35)$$

As derivadas dos invariantes em (1.35) são dadas por

$$\frac{\partial \mathbb{I}_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} = \delta_{ij}, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \mathbb{III}_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} = \delta_{ij} \mathbb{I}_\epsilon - \epsilon_{ij}, \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial \mathbb{IIII}_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} = \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} - \epsilon_{ij} \mathbb{I}_\epsilon + \delta_{ij} \mathbb{III}_\epsilon. \quad (1.38)$$

Considere agora uma temperatura inicial $T = T_0$ na qual o material está livre de tensão. Defina

$$T' = \frac{T - T_0}{T_0}. \quad (1.39)$$

Substituindo T por T' em (1.30) e expandindo em função da resultante,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{I}_\epsilon, \mathbb{III}_\epsilon, \mathbb{VIII}_\epsilon, T') = \frac{1}{\rho} & (a_0 + a_1\mathbb{I}_\epsilon + a_2\mathbb{III}_\epsilon + a_3\mathbb{VIII}_\epsilon + a_4T' + \\ & + a_5\mathbb{I}_\epsilon^2 + a_6\mathbb{III}_\epsilon^2 + a_7\mathbb{VIII}_\epsilon^2 + a_8T'\mathbb{I}_\epsilon + \dots) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Introduzindo esta série, juntamente com (1.36)-(1.38), em (1.28), utilizando (1.31), (1.32), (1.33), e mantendo apenas os termos lineares, fornece a aproximação

$$\sigma_{ij} = (2a_5 + a_2)\delta_{ij}\epsilon_{kk} - a_2\epsilon_{ij} + a_8\delta_{ij}T'. \quad (1.41)$$

Tomando-se

$$a_2 = -2\mu, \quad (1.42)$$

$$a_5 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{2}, \quad (1.43)$$

$$a_8 = -(3\lambda + 2\mu)\alpha_l T_0, \quad (1.44)$$

em que μ e λ são as constantes de Lamé, e α_l o coeficiente de expansão linear, resulta a expressão clássica

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\delta_{ij}\alpha_l(T - T_0). \quad (1.45)$$

A desigualdade em (1.24) implica em uma relação funcional entre S_μ e \dot{d}_μ ; em particular, entre q_i e $\frac{\partial T}{\partial x_i}$. Como aproximação, admitindo uma relação linear entre estas quantidades, a relação mais geral é dada por

$$q_i = a \frac{\partial T}{\partial x_i} + b_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (1.46)$$

Considerando material isotrópico, deve-se ter $b_{ij} = b\delta_{ij}$, e segue de (1.46) a forma clássica da lei de Fourier da condução de calor, dada por

$$q_i = \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (1.47)$$

em que $\kappa = a + b$ é a condutividade térmica.

Retomando a equação (1.19), na ausência de deformações dissipativas, fornece

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \rho T \dot{\eta}. \quad (1.48)$$

Lembrando que $\eta = -\frac{\partial \varphi}{\partial T}$, resulta

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -\rho T \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_{ij} \partial T} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \dot{T} \right) \quad (1.49)$$

Considere, em particular, um processo à deformação constante

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -\rho T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \dot{T} = \rho c_v \dot{T}, \quad (1.50)$$

em que

$$c_v = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} T \quad (1.51)$$

é o calor específico à volume constante.

Retomando a expressão (1.28) e derivando em T , segue que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_{ij} \partial T} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}. \quad (1.52)$$

Por outro lado, segue da expressão (1.45) que

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = -(3\lambda + 2\mu) \delta_{ij} \alpha_l \quad (1.53)$$

Reescrevendo a equação (1.49), com as expressões obtidas acima,

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = \rho c_v \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha_l T \dot{\epsilon}_{kk}. \quad (1.54)$$

A expressão (1.54) corresponde à equação acoplada de conservação da energia da termoelasticidade linear.

1.1.5 Teoria termoelástica desacoplada

O termo $(3\lambda + 2\mu) \alpha_l T \dot{\epsilon}_{kk}$ na expressão (1.54) representa o acoplamento mecânico na equação da condução de calor. Este termo indica que a geração de deformação é acompanhada por um fluxo de calor e consequente aumento da entropia. Ou seja, aumento de energia armazenada mecanicamente de maneira irreversível. Se este fenômeno de dissipação é o principal objeto de interesse no modelo, então a equação acoplada deve ser considerada (BOLEY; WEINER, 1960).

Em muitas aplicações de engenharia, é possível simplificar a expressão (1.54). As simplificações mais comuns consistem na remoção do termo de acoplamento mecânico e dos termos de inércia na equação de movimento. Estas simplificações são motivadas pelo fato de que as variações de temperatura devido à deformação são geralmente pequenas, e que, portanto, não afetam a distribuição de temperatura de maneira significativa.

Assim, neste trabalho, o termo de acoplamento mecânico é desprezado, resultando na equação

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = \rho c_v \dot{T}. \quad (1.55)$$

1.1.6 Axissimetria

Neste trabalho a fibra óptica é um cilindro de seção transversal circular, o que permite utilizar coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , sendo z a coordenada na direção do eixo longitudinal da fibra, para reescrever a equação do calor, dada por (1.55) em coordenadas cartesianas, na forma (OZISIK, 1980)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.56)$$

Supondo uma distribuição axissimétrica de temperatura, em que T não depende da coordenada azimutal ϕ , segue o de (1.56) que

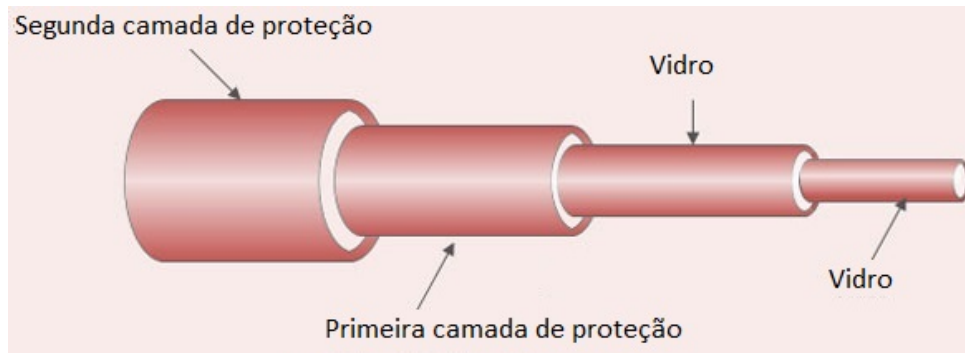
$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.57)$$

2 Transferência de calor

2.1 Formulação do problema

Conforme mencionado na seção 1.1.6, neste trabalho a fibra óptica é um cilindro de seção circular, composto de um núcleo de vidro e dois cilindros concêntricos de materiais poliméricos, conforme ilustrado na Fig. (1). Nesta seção, é determinada a solução analítica da distribuição de temperatura para um número N arbitrário de camadas. São apresentadas, quando pertinente, expressões para o caso de interesse $N = 3$.

Figura 1 – Configuração típica da fibra óptica com núcleo de vidro e duas camadas de recobrimento.



Seja $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ a região composta da união de cilindros circulares e concêntricos ocupando as regiões $\mathcal{B}_i = \{(r, \theta, z) | r_{i-1} \leq r \leq r_i, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq L\}$, $i = 1 \dots N$, em que $r_0 = 0$. O i -ésimo cilindro possui difusividade térmica α_i , condutividade térmica κ_i e coeficiente de transferência de calor h_i constantes. Considerando axissimetria, as soluções de interesse estão definidas sobre $\mathcal{D}_i = \{(r, z) | r_{i-1} \leq r \leq r_i, 0 \leq z \leq L\}$, $i = 1 \dots N$. No que se segue, não se aplica a soma sob índices repetidos.

Busca-se a distribuição de temperatura axissimétrica $T_i : \mathcal{D}_i \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ na i -ésima camada do cilindro que satisfaça a equação da condução de calor

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad (2.1)$$

com $0 \leq t \leq t_f$, juntamente com as condições de contorno e de continuidade

$$-\kappa_N \frac{\partial T_N}{\partial r} = h_{N+1}(T_N - \tilde{T}(z)), \quad r = r_N, \quad (2.2)$$

$$-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} + h_1 T_1 < \infty, \quad r = 0, \quad (2.3)$$

$$\kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r} = \kappa_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r}, \quad r = r_i, \quad i = 1 \dots N - 1, \quad (2.4)$$

$$-\kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r} = h_{i+1}(T_i - T_{i+1}), \quad r = r_i, \quad i = 1 \dots N - 1, \quad (2.5)$$

$$\kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial z} + h_{i+1}^* T_i = \hat{f}(r), \quad z = L, \quad (2.6)$$

$$\kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial z} + h_{i+1}^* T_i = \check{f}(r), \quad z = 0, \quad (2.7)$$

e a condição inicial $T_i|_{t=0} = f_{0i}(r, z)$. As funções $\tilde{T}(z)$ e $f_{0i}(r, z)$ são conhecidas. As constante h_{i+1}^* , $i = 0 \dots N - 1$, são escolhidas para impor a condição de contorno desejada nas extremidades do cilindro.

2.2 Solução analítica

A equação (2.1) é linear, permitindo obter solução particular e solução homogênea independentemente. A solução completa é dada pela combinação linear destas soluções.

A solução analítica de (2.1) pode ser obtida utilizando o método da separação de variáveis (OZISIK, 1980).

Inicialmente, a separação de variáveis será aplicada para se obter as soluções particulares correspondentes à condição de contorno de Dirichlet nas superfícies do cilindro.

Para isso, definimos as seguintes superfícies:

$$\partial\mathcal{B}_1 = \{(r, \theta, z) | r = r_N, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq L\},$$

$$\partial\mathcal{B}_2 = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq r_N, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z = L\},$$

$$\partial\mathcal{B}_3 = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq r_N, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z = 0\}.$$

Uma vez que a equação diferencial é linear, para obter as soluções particulares, permanentes, admite-se condição de contorno não nula em uma superfície $\partial\mathcal{B}_i$, $i=1 \dots N$, por vez e condição de contorno nula nas superfícies restantes. Assim, na abordagem da solução particular de cada superfície, a equação (2.1) é considerada em regime permanente. Posteriormente, a solução transiente é obtida utilizando as condições de contorno nula, juntamente com as condições de continuidade e a condição inicial.

2.2.1 Superfície $\partial\mathcal{B}_1$

Considere inicialmente a superfície $\partial\mathcal{B}_1$. É imposta a condição de contorno nula nas superfícies $\partial\mathcal{B}_2$ e $\partial\mathcal{B}_3$.

Busca-se a distribuição de temperatura $T_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a equação da condução de calor em regime permanente

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = 0, \quad (2.8)$$

em que $r_{i-1} \leq r \leq r_i, 0 \leq z \leq L, i = 1 \dots N$ e $r_0 = 0$, juntamente com as condições de contorno (2.2) a (2.7) considerando $\hat{f}(r) = \check{f}(r) = 0$.

Considere a separação de variáveis

$$T_i(r, z) = R_i(r)Z(z), \quad (2.9)$$

$i = 1 \dots N$. Introduzindo (2.9) em (2.8), obtém-se

$$\frac{1}{R_i} \left[\frac{\partial^2 R_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_i}{\partial r} \right] = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}. \quad (2.10)$$

A equação (2.10) implica que ambos os lados são iguais a uma constante de separação η , que deve ser determinada de modo a satisfazer as condições de contorno. Aqui, utilizamos resultado apresentado em Ozisik (1980) e tomamos, a priori, o sinal adequado da constante de separação. Assim, (2.10) fornece as equações diferenciais ordinárias

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_i}{\partial r} - \eta^2 R_i = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \eta^2 Z = 0. \quad (2.12)$$

As soluções das equações diferenciais (2.11) e (2.12) são dadas por Ozisik (1980)

$$R_i(r) = A_i I_0(\eta r) + B_i K_0(\eta r), \quad (2.13)$$

$$Z(z) = C \operatorname{sen}(\eta z) + D \operatorname{cos}(\eta z), \quad (2.14)$$

em que A_i, B_i, C e D são constantes a determinar das condições de contorno e $I_0(\eta r)$ e $K_0(\eta r)$ são as funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo, respectivamente.

Introduzindo (2.9) em (2.2), fornece

$$-\kappa_N Z \frac{\partial R_N}{\partial r} = h_{N+1} Z R_N - h_{N+1} \tilde{T}(z).$$

Separando os termos que dependem de r e de z ,

$$\frac{\kappa_N}{h_{N+1}} \frac{\partial R_N}{\partial r} + R_N = \frac{\tilde{T}(z)}{Z} = c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ pode ser escolhido arbitrariamente, pois é apenas uma constante multiplicativa que é compensada ao se impor as condições de contorno e continuidade. Por simplicidade, tome $c = 1$. Resulta

$$\frac{\kappa_N}{h_{N+1}} \frac{\partial R_N}{\partial r} + R_N = 1. \quad (2.15)$$

Similarmente, a introdução de (2.9) na condição de contorno (2.3) fornece

$$Z \left[-\kappa_1 \frac{\partial R_1}{\partial r} + h_1 R_1 \right] < \infty$$

Uma vez que $Z(z)$ é contínua e limitada no intervalo $[0, L]$, segue que

$$-\kappa_1 \frac{\partial R_1}{\partial r} + h_1 R_1 < \infty. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.9) na condição de contorno (2.4), resulta

$$Z \left(\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} - \kappa_{i+1} \frac{\partial R_{i+1}}{\partial r} \right) = 0.$$

Como $Z(z) \neq 0$, segue que

$$\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} = \kappa_{i+1} \frac{\partial R_{i+1}}{\partial r}, \quad i = 1 \dots N - 1. \quad (2.17)$$

Similarmente, a condição de contorno (2.5) fornece

$$Z \left[-\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} - h_{i+1} (R_i - R_{i+1}) \right] = 0.$$

Como $Z(z) \neq 0$, segue que

$$-\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} = h_{i+1} (R_i - R_{i+1}), \quad i = 1 \dots N - 1. \quad (2.18)$$

A condição de contorno (2.6) juntamente com $\hat{f}(r) = 0$ e (2.9) fornecem

$$R_i \left[\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1} R_i Z \right] = 0.$$

Uma vez que $R_i(r) \neq 0$,

$$\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1} Z = 0, \quad i = 1 \dots N. \quad (2.19)$$

A condição de contorno (2.7) juntamente com $\check{f}(r) = 0$ e (2.9) fornecem

$$R_i \left[-\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1} Z \right] = 0$$

Novamente, como $R_i(r) \neq 0$, segue que

$$-\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1} Z = 0, \quad i = 1 \dots N. \quad (2.20)$$

As condições de contorno obtidas acima levam a dois sistemas de equações lineares. Um sistema referente à componente radial da solução

$$M_R a_R = b_R, \quad (2.21)$$

em que

$$a_R = \begin{pmatrix} A_{1n} \\ B_{1n} \\ \vdots \\ A_{Nn} \\ B_{Nn} \end{pmatrix}, \quad b_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a forma da matriz M_R depende do número de camadas N . Neste estudo, o caso de interesse corresponde a $N = 3$, por tratar do núcleo da fibra óptica e dois revestimentos poliméricos. Neste caso

$$M_R = \begin{bmatrix} I_0(\eta_n r_1) & -I_0(\eta_n r_1) & -K_0(\eta_n r_1) & 0 & 0 \\ \kappa_1 \eta_n I_1(\eta_n r_1) & -\kappa_2 \eta_n I_1(\eta_n r_1) & \kappa_2 \eta_n K_1(\eta_n r_1) & 0 & 0 \\ 0 & I_0(\eta_n r_2) & K_0(\eta_n r_2) & -I_0(\eta_n r_2) & -K_0(\eta_n r_2) \\ 0 & \kappa_2 \eta_n I_1(\eta_n r_2) & -\kappa_2 \eta_n K_1(\eta_n r_2) & -\kappa_3 \eta_n I_1(\eta_n r_2) & \kappa_3 \eta_n K_1(\eta_n r_2) \\ 0 & 0 & 0 & I_0(\eta_n r_3) & K_0(\eta_n r_3) \end{bmatrix}$$

e outro referente a solução longitudinal

$$M_Z a_Z = b_Z. \quad (2.22)$$

em que

$$a_Z = \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}, \quad b_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_Z = \begin{bmatrix} \eta_n \cos(\eta_n L) & -\eta_n \sin(\eta_n L) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para se obter a solução não nula foi imposto $\det(M_Z) = 0$. Esta condição leva a um problema de autovalores η_p e autofunções Z_p . Como o sistema possui infinitas soluções, a solução resultante pode ser escrita como

$$T_i^{[1]}(r, z) = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{A}_p R_{ip}(r) Z_p(z), \quad (2.23)$$

em que os coeficientes \bar{A}_p , $p = 1, 2, \dots$, são determinados da imposição das condições de contorno.

Note que para cada autovalor η_n , a matriz M_R é determinada e é possível calcular os coeficientes em a_R . Um dos coeficientes de a_Z , em geral, pode ser tomado arbitrariamente, de modo que, independente da escolha, o valor é compensado ao se impor as condições de contorno.

Tendo em vista a expressão (2.14), Z_p é uma combinação linear de senos e cossenos, e a seguinte relação de ortogonalidade é válida

$$\int_0^L Z_n Z_p dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq p \\ N(Z_n) & \text{se } n = p \end{cases}, \quad (2.24)$$

em que $N(Z_n) = \int_0^L Z_n^2 dz$.

Introduzindo (2.23) em (2.2)

$$\kappa_N \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \bar{A}_p R_{ip}(r) Z_p(z) \right) + h_{N+1} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \bar{A}_p R_{ip}(r) Z_p(z) \right) = h_{N+1} \tilde{T},$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \bar{A}_p Z_p \left(\kappa_N \frac{\partial R_{Np}}{\partial r} + h_{N+1} R_{Np} \right) = h_{N+1} \tilde{T}. \quad (2.25)$$

Multiplicando (2.25) por Z_q , integrando em z no intervalo $(0, L)$, e utilizando a relação de ortogonalidade (2.24), resulta

$$\bar{A}_p N(Z_p) \left(\kappa_N \frac{\partial R_{Np}}{\partial r} + h_{N+1} R_{Np} \right) = h_{N+1} \int_0^L Z_p \tilde{T} dz,$$

fornecendo

$$\bar{A}_p = \frac{h_{N+1} \int_0^L Z_p \tilde{T} dz}{N(Z_p) \left(\kappa_N \frac{\partial R_{Np}}{\partial r} + h_{N+1} R_{Np} \right)}. \quad (2.26)$$

Assim, com o coeficiente \bar{A}_p , e os vetores a_R e a_Z , a expressão (2.23) é determinada.

2.2.2 Superfícies $\partial\mathcal{B}_2$ e $\partial\mathcal{B}_3$

A abordagem para a obtenção das soluções particulares considerando condições de contorno nas superfícies $\partial\mathcal{B}_2$ e $\partial\mathcal{B}_3$ é análoga. Considere a superfície $\partial\mathcal{B}_2$. São impostas condições de contorno nulas nas superfícies $\partial\mathcal{B}_1$ e $\partial\mathcal{B}_3$.

Busca-se a distribuição de temperatura $T_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a equação da condução de calor em regime permanente (2.8) juntamente com as condições (2.2) a (2.7) considerando $\tilde{T}(z) = \check{f}(r) = 0$.

Considere a separação de variáveis

$$T_i(r, z) = R_i(r)Z(z), \quad i = 1 \dots N. \quad (2.27)$$

Introduzindo (2.27) em (2.8), e isolando as variáveis, obtém-se

$$\frac{1}{R_i} \left(\frac{\partial^2 R_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_i}{\partial r} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.$$

A constante de separação η deve ser escolhida para que sejam satisfeitas as condições de contorno (OZISIK, 1980). Toma-se

$$\frac{1}{R_i} \left(\frac{\partial^2 R_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_i}{\partial r} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\eta^2. \quad (2.28)$$

Fornecendo as equações diferenciais ordinárias

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_i}{\partial r} + \eta^2 R_i = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \eta^2 Z = 0. \quad (2.30)$$

As soluções das equações diferenciais (2.29) e (2.30) são dadas por Ozisik (1980)

$$R_i(r) = A_i J_0(\eta r) + B_i Y_0(\eta r), \quad (2.31)$$

$$Z(z) = C \operatorname{senh}(\eta z) + D \operatorname{cosh}(\eta z), \quad (2.32)$$

em que $J_0(\eta r)$ e $Y_0(\eta r)$ são as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo, respectivamente.

Introduzindo a expressão (2.27) na condição de contorno (2.2), fornece

$$Z \left(\kappa_N \frac{\partial R_N}{\partial r} + h_{N+1} R_N \right) = 0.$$

Uma vez que $Z(z) \neq 0$, segue que

$$\kappa_N \frac{\partial R_N}{\partial r} + h_{N+1} R_N = 0. \quad (2.33)$$

Introduzindo (2.27) na condição de contorno (2.3), fornece

$$Z \left(-\kappa_1 \frac{\partial R_1}{\partial r} + h_1 R_1 \right) < \infty.$$

A função $Z(z)$ é contínua e limitada no intervalo $[0, L]$, logo

$$-\kappa_1 \frac{\partial R_1}{\partial r} + h_1 R_1 < \infty. \quad (2.34)$$

Similarmente, introduzindo (2.27) na condição de contorno (2.4), resulta

$$Z \left(\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} - \kappa_{i+1} \frac{\partial R_{i+1}}{\partial r} \right).$$

Como $Z(z) \neq 0$, segue que

$$\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} = \kappa_{i+1} \frac{\partial R_{i+1}}{\partial r}. \quad (2.35)$$

Introduzindo também (2.27) na condição de contorno (2.5), resulta

$$Z \left(\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} - h_{i+1} (R_i - R_{i+1}) \right) = 0.$$

Como $Z(z) \neq 0$, segue que

$$\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} = h_{i+1} (R_i - R_{i+1}). \quad (2.36)$$

Introduzindo agora a expressão (2.27) na condição de contorno (2.6), fornece

$$\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1} Z = \frac{\hat{f}}{R_i}(r).$$

Note que o lado esquerdo da equação acima é uma constante para cada $i = 1 \dots N - 1$, e podemos tomar

$$\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1} Z = 1. \quad (2.37)$$

Introduzindo a expressão (2.27) na condição de contorno (2.7), fornece

$$R_i(-\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1} Z) = 0.$$

Uma vez que $R_i(r) \neq 0$, segue que

$$-\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1} Z = 0. \quad (2.38)$$

Analogamente, ao introduzir as funções (2.31) e (2.32) nas condições de contorno (2.33) a (2.38), resultam dois sistemas de equações lineares. Na coordenada radial resulta

$$M_R a_R = b_R, \quad (2.39)$$

em que

$$a_R = \begin{pmatrix} A_{1n} \\ B_{1n} \\ \vdots \\ A_{Nn} \\ B_{Nn} \end{pmatrix}, \quad b_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a forma da matriz M_R depende do número de camadas N . Neste estudo, o caso de interesse corresponde a $N = 3$, por tratar do núcleo da fibra óptica e dois revestimentos poliméricos. Neste caso

$$M_R = \begin{bmatrix} J_0(\eta_n r_1) & -J_0(\eta_n r_1) & -Y_0(\eta_n r_1) & 0 & 0 \\ \kappa_1 \eta_n J_1(\eta_n r_1) & -\kappa_2 \eta_n J_1(\eta_n r_1) & \kappa_2 \eta_n Y_1(\eta_n r_1) & 0 & 0 \\ 0 & J_0(\eta_n r_2) & Y_0(\eta_n r_2) & -J_0(\eta_n r_2) & -Y_0(\eta_n r_2) \\ 0 & \kappa_2 \eta_n J_1(\eta_n r_2) & -\kappa_2 \eta_n Y_1(\eta_n r_2) & -\kappa_3 \eta_n J_1(\eta_n r_2) & \kappa_3 \eta_n Y_1(\eta_n r_2) \\ 0 & 0 & 0 & J_0(\eta_n r_3) & Y_0(\eta_n r_3) \end{bmatrix},$$

e na coordenada longitudinal, resulta

$$M_Z a_Z = b_Z, \quad (2.40)$$

em que

$$a_Z = \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}, \quad b_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_Z = \begin{bmatrix} \eta_n \cosh(\eta_n L) & -\eta_n \sinh(\eta_n L) \\ \eta_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, $b_R = 0$. Deve-se impor $\det(M_R) = 0$ para determinar os autovalores η_n . Uma vez determinados os autovalores, a solução pode ser escrita como

$$T_i^{[2]}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n R_{in}(r) Z_n(z), \quad (2.41)$$

em que o coeficiente \hat{c}_n será determinado a partir das condições de contorno.

Utilizando a seguinte relação de ortogonalidade, apresentada em Ozisik (1980)

$$\sum_{i=0}^{N-1} \kappa_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} r R_{in} R_{ip} dr = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq p \\ N(R_n) & \text{se } n = p \end{cases}, \quad (2.42)$$

em que

$$N(R_n) = \sum_{i=0}^{N-1} \kappa_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} r R_{in}^2 dr, \quad (2.43)$$

Introduzindo (2.41) em (2.6), obtém-se

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \kappa_i \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n R_{ip} R_{in} \left(\kappa_i \frac{\partial Z_n}{\partial z} + h_{i+1} Z_n \right) r dr = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \kappa_i \hat{f} r dr. \quad (2.44)$$

Utilizando a relação de ortogonalidade (2.42), segue que

$$\hat{c}_n N(R_n) \left(\kappa_i \frac{\partial Z_n}{\partial z} + h_{i+1} Z_n \right) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \kappa_i R_{in} \hat{f} r dr. \quad (2.45)$$

Logo,

$$\hat{c}_n = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \kappa_i R_{in} \hat{f} r dr}{N(R_n) \left(\kappa_i \frac{\partial Z_n}{\partial z} + h_{i+1} Z_n \right)}. \quad (2.46)$$

Note que $\frac{\partial Z_n}{\partial z}$ e Z_n são calculados em $z = L$.

Para a superfície $\partial \mathcal{B}_3$ o procedimento é análogo. Aqui,

$$T_i^{[3]}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n R_{in}(r) Z_n(z), \quad (2.47)$$

em que

$$\check{c}_n = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \kappa_i R_{in} \check{f} r dr}{N(R_n)(\kappa_i \frac{\partial Z_n}{\partial z} + h_{i+1} Z_n)}. \quad (2.48)$$

Neste caso, $\frac{\partial Z_n}{\partial z}$ e Z_n são calculados em $z = 0$.

Conforme discutido na seção 2.2.1, para cada autovalor η_n , os vetores a_R e a_Z são determinados. Juntamente com os coeficientes (2.46) e (2.48), as expressões (2.41) e (2.47) são, respectivamente, determinadas.

2.2.3 Solução transiente

Busca-se a distribuição de temperatura $T_i : \mathcal{D}_i \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a equação da condução de calor em regime transiente dada por (2.1) juntamente com as condições (2.2) a (2.7) considerando $\tilde{T}(z) = \hat{f}(r) = 0$ e a condição inicial $T|_{t=0} = \bar{f}_0 = f_0(r, z) - \sum_{i=1}^3 T^{[i]}(r, z)$, em que $T^{[i]}(r, z)$, $i = 1, 2, 3$, são as soluções particulares obtidas da superfície $\partial\mathcal{B}_i$ correspondente, as quais são dadas por (2.23), (2.41) a (2.47).

Considere a separação de variáveis $T_i(r, z, t) = \Psi_i(r, z)\Gamma(t)$. Introduzindo em (2.1), segue que

$$\frac{\alpha_i}{\Psi_i} \left(\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\lambda_i^2,$$

em que λ_i é a constante de separação. Logo,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \lambda_i^2 \Gamma = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} + \frac{\lambda_i^2}{\alpha_i} \Psi_i = 0. \quad (2.50)$$

Considere agora outra separação de variáveis, $\Psi_i(r, z) = R_i(r)Z(z)$. Introduzindo a mesma em (2.50), fornece

$$\frac{\alpha_i}{R_i} \left(\frac{\partial^2 R_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_i}{\partial r} \right) = -\frac{1}{Z} \left(\alpha_i \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda_i^2 Z \right) = -\beta^2. \quad (2.51)$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_i}{\partial r} + \frac{\beta^2}{\alpha_i} R_i = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{\lambda_i^2 - \beta^2}{\alpha_i} Z = 0. \quad (2.53)$$

Definindo $\eta^2 = \frac{\lambda_i^2 - \beta^2}{\alpha_i}$, em (2.53) fornece

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \eta^2 Z = 0. \quad (2.54)$$

As soluções de (2.52) e (2.54) são, de acordo com Ozisik (1980), dadas por

$$R_i(r) = A_i I_0(\eta r) + B_i K_0(\eta r), \quad (2.55)$$

$$Z(z) = C \operatorname{sen}(\eta z) + D \operatorname{cos}(\eta z), \quad (2.56)$$

em que I_0 e K_0 são as funções de Bessel modificadas de ordem zero do primeiro e segundo tipo, respectivamente.

Aplicando agora a separação de variáveis na condição de contorno (2.2) com $\tilde{T}(z) = 0$, resulta

$$Z\Gamma \left(\kappa_N \frac{\partial R_N}{\partial r} + h_{N+1} R_N \right) = 0.$$

Uma vez que $Z(z)\Gamma(t) \neq 0$, segue que

$$\kappa_N \frac{\partial R_N}{\partial r} + h_{N+1} R_N = 0. \quad (2.57)$$

Similarmente, a condição de solução limitada (2.3) fornece

$$Z\Gamma \left(-\kappa_1 \frac{\partial R_1}{\partial r} + h_1 R_1 \right) < \infty.$$

Para a região fechada $[0, L] \times [0, t]$, tem-se $Z(z)\Gamma(t)$ limitado. Logo,

$$-\kappa_1 \frac{\partial R_1}{\partial r} + h_1 R_1 < \infty. \quad (2.58)$$

Aplicando a separação de variáveis em (2.4), segue que

$$Z\Gamma \left(\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} - \kappa_{i+1} \frac{\partial R_{i+1}}{\partial r} \right) = 0.$$

Uma vez que $Z(z)\Gamma(t) \neq 0$ em $[0, L] \times [0, t]$, resulta

$$\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} = \kappa_{i+1} \frac{\partial R_{i+1}}{\partial r}. \quad (2.59)$$

Similarmente, segue de (2.5) que

$$Z\Gamma \left[\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} + h_{i+1}(R_i - R_{i+1}) \right] = 0.$$

Novamente, uma vez que $Z(z)\Gamma(t) \neq 0$ em $[0, L] \times [0, t]$, resulta

$$\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r} = h_{i+1}(R_{i+1} - R_i). \quad (2.60)$$

A condição de contorno (2.6) com $\hat{f}(r) = 0$ fornece

$$R_i\Gamma \left(\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1} \right) = 0.$$

Como $R_i(r)\Gamma(t) \neq 0$, segue que

$$\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1} = 0. \quad (2.61)$$

A condição (2.7) com $\check{f}(r) = 0$

$$R_i\Gamma \left(-\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1}Z \right) = 0.$$

Uma vez que $R_i(r)\Gamma(t) \neq 0$, resulta

$$-\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial z} + h_{i+1}Z = 0. \quad (2.62)$$

Introduzindo as funções (2.55) e (2.56) nas expressões (2.57) a (2.62), resultam dois sistemas de equações lineares, dados por

$$M_R a_R = b_R, \quad (2.63)$$

em que

$$a_R = \begin{pmatrix} A_{1n} \\ B_{1n} \\ \vdots \\ A_{Nn} \\ B_{Nn} \end{pmatrix},$$

e b_R é um vetor nulo. Conforme discutido nas seções 2.2.1 e 2.2.2, o caso de interesse corresponde a $N = 3$, em cujo caso a matriz M_R é dada por

$$M_R = \begin{bmatrix} J_0\left(\frac{\beta_n r_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) & -J_0\left(\frac{\beta_n r_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & -Y_0\left(\frac{\beta_n r_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & 0 & 0 \\ \frac{\kappa_1 \beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} J_1\left(\frac{\beta_n r_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) & -\frac{\kappa_2 \beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} J_1\left(\frac{\beta_n r_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & \frac{\kappa_2 \beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} Y_1\left(\frac{\beta_n r_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & J_0\left(\frac{\beta_n r_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & Y_0\left(\frac{\beta_n r_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & -J_0\left(\frac{\eta_n r_2}{\sqrt{\alpha_3}}\right) & -Y_0\left(\frac{\eta_n r_2}{\sqrt{\alpha_3}}\right) \\ 0 & \frac{\kappa_2 \beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} J_1\left(\frac{\beta_n r_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & -\frac{\kappa_2 \beta_n}{\alpha_2} Y_1\left(\frac{\beta_n r_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & -\frac{\kappa_3 \beta_n}{\alpha_3} J_1\left(\frac{\beta_n r_2}{\sqrt{\alpha_3}}\right) & \frac{\kappa_3 \beta_n}{\sqrt{\alpha_3}} Y_1\left(\frac{\beta_n r_2}{\sqrt{\alpha_3}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & J_0\left(\frac{\beta_n r_3}{\sqrt{\alpha_3}}\right) & Y_0\left(\frac{\beta_n r_3}{\alpha_3}\right) \end{bmatrix}.$$

O segundo sistema é dado por

$$M_Z a_Z = b_Z, \quad (2.64)$$

em que b_Z é o vetor nulo, e

$$M_Z = \begin{bmatrix} \eta_n \cosh(\eta_n L) & -\eta_n \sinh(\eta_n L) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Impõem-se $\det(M_R) = 0$ e $\det(M_Z) = 0$. Determinando os autovalores β e η , pode-se escrever

$$T_i(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} c_{np} e^{-(\beta^2 + \alpha_i \eta^2)t} Z_p(z) R_{in}(r). \quad (2.65)$$

Para definir c_{np} serão introduzidas relações de ortogonalidade na seção a seguir.

2.2.4 Relações de ortogonalidade

A solução geral da equação (2.1), juntamente com as condições de contorno e continuidade de (2.2) a (2.7) e a condição inicial $T_i|_{t=0} = f_{0i}(r, z)$, é dada em termos de série infinita de autofunções R_{im} e Z_p e seus respectivos autovalores associados β_m e η_p . Será necessário estabelecer relações de ortogonalidade para representar as condições de contorno em termos das autofunções. Para isto, considere o desenvolvimento apresentado a seguir.

Inicialmente, (2.52) é reescrita na forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R_i}{\partial r} \right) + \frac{\beta^2}{\alpha_i} R_i = 0. \quad (2.66)$$

Expressando (2.66) para duas autofunções R_{im} e R_{in} , resulta

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R_{im}}{\partial r} \right) + \frac{\beta_m^2}{\alpha_i} R_{im} = 0, \quad (2.67)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R_{in}}{\partial r} \right) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_i} R_{in} = 0. \quad (2.68)$$

Multiplicando (2.67) por R_{in} , (2.68) por R_{im} e subtraindo a segunda expressão da primeira, resulta

$$\frac{(\beta_m^2 - \beta_n^2)}{\alpha_i} r R_{im} R_{in} = \frac{\partial}{\partial r} \left(R_{im} r \frac{\partial R_{in}}{\partial r} - R_{in} r \frac{\partial R_{im}}{\partial r} \right). \quad (2.69)$$

Integrando de (2.69) no intervalo (r_i, r_{i+1}) , fornece

$$\frac{(\beta_m^2 - \beta_n^2)}{\alpha_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r R_{im} R_{in} dr = \left[R_{im} r \frac{\partial R_{in}}{\partial r} - R_{in} r \frac{\partial R_{im}}{\partial r} \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \quad (2.70)$$

Multiplicando por κ_i , a condutividade térmica da i -ésima camada, e somando em $i = 0 \dots N - 1$, segue que

$$(\beta_m^2 - \beta_n^2) \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r R_{im} R_{in} dr = \sum_{i=0}^{N-1} \kappa_i \left[R_{im} r \frac{\partial R_{in}}{\partial r} - R_{in} r \frac{\partial R_{im}}{\partial r} \right]_{r_i}^{r_{i+1}}. \quad (2.71)$$

Neste trabalho, o contato térmico entre as camadas é suposto perfeito, de modo que o coeficiente de transferência de calor $h_i \rightarrow \infty$. Neste caso, a condição de continuidade (2.5), juntamente com a separação de variáveis $T_i(r, z, t) = R_i(r)Z(z)\Gamma(t)$, implica

$$R_i(r_i) = R_{i+1}(r_i), \quad i = 1 \dots N - 1. \quad (2.72)$$

A condição de continuidade (2.4), juntamente com a separação de variáveis $T_i(r, z, t) = R_i(r)Z(z)\Gamma(t)$, fornece

$$\kappa_i \frac{\partial R_i}{\partial r}(r_i) = \kappa_{i+1} \frac{\partial R_{i+1}}{\partial r}(r_i), \quad i = 1 \dots N - 1. \quad (2.73)$$

Expandindo o lado esquerdo da equação acima, e considerando as expressões (2.72) e (2.73), note que os termos intermediários cancelam-se mutuamente. Uma vez que $r_0 = 0$, segue que

$$(\beta_m^2 - \beta_n^2) \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r R_{im} R_{in} dr = r_N \kappa_N \left(R_{Nm} \frac{\partial R_{Nn}}{\partial r} - R_{Nn} \frac{\partial R_{Nm}}{\partial r} \right) \quad (2.74)$$

Considere a condição de contorno (2.2). Seja $\Lambda(z, t) = Z(z)\Gamma(t)$, isto é, $T_i(r, z, t) = R_i(r)\Lambda(z, t)$. Escrevendo (2.2) para duas autofunções R_{Nm} e R_{Nn} , fornece

$$\Lambda \kappa_N \frac{\partial R_{Nm}}{\partial r} + h_{N+1} \Lambda R_{Nm} = h_{N+1} \bar{T}, \quad (2.75)$$

$$\Lambda \kappa_N \frac{\partial R_{Nn}}{\partial r} + h_{N+1} \Lambda R_{Nn} = h_{N+1} \bar{T} \quad (2.76)$$

Multiplicando (2.75) por R_{Nm} , (2.76) por R_{Nm} , e subtraindo a segunda expressão da primeira, resulta

$$\kappa_N \left(\frac{\partial R_{Nm}}{\partial r} R_{Nn} - \frac{\partial R_{Nn}}{\partial r} R_{Nm} \right) = 0, \quad (2.77)$$

pois $\Lambda_N(z, t) \neq 0$. Segue então, de (2.74), que

$$(\beta_m^2 - \beta_n^2) \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r R_{im} R_{in} dr = 0. \quad (2.78)$$

No caso em que $\beta_m \neq \beta_n$, segue, de (2.78), que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r R_{im} R_{in} dr = 0. \quad (2.79)$$

Pode-se, então, escrever a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r R_{im} R_{in} dr = \delta_{mn} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r R_{im}^2 dr, \quad (2.80)$$

em que δ_{mn} é o delta de Kroenecker.

Considere agora (2.65) quando $t = 0$, ou seja,

$$T_i(r, z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} c_{np} Z_p(z) R_{in}(r) = \bar{f}_0, \quad (2.81)$$

em que $\bar{f}_0 = f_0(r, z) - \sum_{i=1}^3 T^{[i]}(r, z)$.

Multiplicando a expressão (2.81) por uma função $Z_q(z)$, integrando a expressão resultante em z no intervalo $(0, L)$, e tendo em vista a relação de ortogonalidade (2.80), segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{np} R_{in} = \frac{1}{N(Z_p)} \int_0^L Z_p \bar{f}_0 dz,$$

em que $N(Z_p) = \int_0^L Z_p^2 dz$.

Multiplicando agora a expressão (2.2.4) por $\frac{\kappa_i}{\alpha_i} r R_{im}$, integrando no em r no intervalo (r_{i-1}, r_i) , $i = 1 \dots N$, somando as expressões resultantes, e considerando (2.80), fornece

$$c_{np} = \frac{1}{N(Z_p)N(R_n)} \sum_{i=1}^N \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \int_0^L r R_{in} Z_p \bar{f}_0 dz dr, \quad (2.82)$$

em que $N(R_n) = \sum_{i=1}^N \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r R_{in}^2 dr$.

Assim, são obtidos os coeficientes c_{np} da expressão (2.47), e a solução transiente está determinada em função da condição inicial $\bar{f}_0 = f_0(r, z) - \sum_{i=1}^3 T^{[i]}(r, z)$. Realiza-se o

mesmo procedimento discutido nas seções 2.2.1 e 2.2.2 para determinação dos vetores a_R e a_Z .

2.3 Solução numérica

2.3.1 Formulação clássica

Seja $\mathcal{B} = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq L\}$ um cilindro circular, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \partial\mathcal{B}_i$, em que $\partial\mathcal{B}_i$ estão definidas na seção 2.2, a superfície de \mathcal{B} , κ a condutividade térmica e α a difusividade térmica.

Dadas a condição inicial $f_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, as condições de contorno $\tilde{T} : \partial\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{f} : \partial\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\check{f} : \partial\mathcal{B}_3 \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \text{ em } \mathcal{B} \times (0, t), \quad (2.83)$$

$$T = \tilde{T}(z) \text{ em } r = R, \quad (2.84)$$

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial z} = \hat{f}(r) \text{ em } z = L, \quad (2.85)$$

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial z} = \check{f}(r) \text{ em } z = 0, \quad (2.86)$$

$$T|_{t=0} = f_0 \text{ em } \mathcal{B}, \quad (2.87)$$

em que

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(\bullet)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial z^2} \quad (2.88)$$

é o operador Laplaciano, aqui dado em coordenadas cilíndricas.

2.3.2 Formulação variacional

Considere os seguintes conjuntos

$$\nu = \{w | w(\underline{x}) = 0, \underline{x} \in \Gamma_g\}, \quad (2.89)$$

$$\delta = \{u | u(\underline{x}) = \tilde{T}, u \in H^1, \underline{x} \in \Gamma_g\}, \quad (2.90)$$

em que Γ_g é a parte de Γ sujeita à condição de contorno de Dirichlet, H^1 é o espaço de Hilbert tal que a primeira derivada é quadrado-integrável, e seja $\Gamma_h = \Gamma - \Gamma_g$.

Multiplicando (2.83) por $w \in \nu$ arbitrário, pela condutividade térmica κ e integrando sobre \mathcal{B} , resulta

$$\int_{\mathcal{B}} \kappa \nabla^2 T w dV = \int_{\mathcal{B}} \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} w dV. \quad (2.91)$$

Considere a fórmula de Green fornecida por Hughes (2000)

$$\int_{\mathcal{B}} v_1 \nabla^2 v_2 dV = \int_{\Gamma} v_1 \frac{\partial v_2}{\partial n} d\Gamma - \int_{\mathcal{B}} \nabla v_1 \nabla v_2 dV, \quad (2.92)$$

em que v_1 e v_2 são funções contínuas e $\frac{\partial(\bullet)}{\partial n}$ é o gradiente de (\bullet) na direção do versor normal exterior a Γ . Aplicando esta fórmula em (2.91), resulta em

$$\int_{\Gamma} \kappa w \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma - \int_{\mathcal{B}} \kappa \nabla w \nabla T dV = \int_{\mathcal{B}} \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} w dV.$$

Uma vez que $w \in \nu$, segue que

$$\int_{\Gamma_h} \kappa w \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma - \int_{\mathcal{B}} \kappa \nabla w \nabla T dV = \int_{\mathcal{B}} \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} w dV. \quad (2.93)$$

Aplicando as mesmas operações que precedem (2.91) sobre a condição inicial, resulta em

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\kappa}{\alpha} w T|_{t=0} dV = \int_{\mathcal{B}} \frac{\kappa}{\alpha} w T_0 dV. \quad (2.94)$$

Introduzindo a notação

$$a(v_1, v_2) = \int_{\mathcal{B}} \nabla v_1 \nabla v_2 dV, \quad (2.95)$$

$$(v_1, v_2) = \int_{\mathcal{B}} v_1 v_2 dV, \quad (2.96)$$

$$(v_1, v_2)^S = \int_S v_1 v_2 dS, \quad (2.97)$$

em que S é uma superfície genérica parâmetro da função.

As expressões (2.93) e (2.94) são, então, reescritas como

$$\left(w, \kappa \frac{\partial T}{\partial n}\right)^{\Gamma_h} - a(w, \kappa T) = \left(w, \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}\right), \quad (2.98)$$

$$\left(w, \frac{\kappa}{\alpha} T|_{t=0}\right) = \left(w, \frac{\kappa}{\alpha} T_0\right). \quad (2.99)$$

Assim, dados $\hat{f} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $\check{f} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{T} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $T \in \delta$ tal que, para todo $w \in \nu$, (2.98) é satisfeita com condição inicial (2.99).

2.3.3 Formulação de Galerkin

Para implementação do MEF, primeiramente é obtida a formulação de Galerkin. Sejam $\delta^h \subset \delta$ e $\nu^h \subset \nu$ conjuntos de dimensão finita e considere $T^h \in \delta^h$ da forma

$$T^h = v^h + g^h, \quad (2.100)$$

com $v^h \in \nu^h$ e $g^h \in \delta^h$. Note que $T^h(\Gamma_g) = \tilde{T}$.

Introduzindo T^h em (2.98), segue que

$$(w, \kappa \frac{\partial g^h}{\partial n})_{\Gamma_h} - a(w, \kappa v^h) - a(w, \kappa g^h) = (w, \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial v^h}{\partial t}) + (w, \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial g^h}{\partial t}).$$

Uma vez que $\Gamma_h = \cup_{i=2}^3 \partial \mathcal{B}_i$, pois $\Gamma_g = \partial \mathcal{B}_1$ tendo em vista as condições de contorno (2.84) a (2.86), segue que

$$(w, \kappa \frac{\partial g^h}{\partial n})_{\partial \mathcal{B}_2} + (w, \kappa \frac{\partial g^h}{\partial n})_{\partial \mathcal{B}_3} - a(w, \kappa v^h) - a(w, \kappa g^h) = (w, \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial v^h}{\partial t}) + (w, \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial g^h}{\partial t}).$$

Note das condições de contorno (2.85) e (2.86), e considerando $T = T^h$, que $\kappa \frac{\partial g^h}{\partial n} = \hat{f}(r)$ em $\partial \mathcal{B}_2$ e $\kappa \frac{\partial g^h}{\partial n} = \check{f}(r)$ em $\partial \mathcal{B}_3$, respectivamente. Assim, rearranjando os termos, fornece

$$a(w, \kappa v^h) + (w, \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial v^h}{\partial t}) = (w, \hat{f})_{\partial \mathcal{B}_2} + (w, \check{f})_{\partial \mathcal{B}_3} - a(w, \kappa g^h) - (w, \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial g^h}{\partial t}). \quad (2.101)$$

Analogamente para a condição inicial (2.99), obtém-se

$$(w, \frac{\kappa}{\alpha} v^h|_{t=0}) = (w, \frac{\kappa}{\alpha} (T_0 - g^h|_{t=0})). \quad (2.102)$$

Assim, dados $\hat{f} : \partial \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\check{f} : \partial \mathcal{B}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g^h \in \delta^h$, queremos encontrar $v^h \in \nu^h$ tal que, para todo $w \in \nu^h$, (2.101) é satisfeita juntamente com a condição inicial (2.102).

2.3.4 Funções de forma

Considere que \mathcal{B} seja subdividido em elementos poligonais. Sejam os vértices desses elementos poligonais denominados de nós e considere que os nós estão enumerados, de modo que o conjunto de todos os índices de nós da malha é η . Os índices deste conjunto que correspondem aos nós em Γ_g e Γ_h compõem os conjuntos η_g e η_h , respectivamente.

Seja $w \in \nu^h$ uma função dada por

$$w(r, z, t) = \sum_{A \in \eta_h} N_A(r, z) d_A, \quad (2.103)$$

com $d_A \in \mathbb{R}$. Seja também $g^h \in \delta^h$ dada por

$$g^h(r, z) = \sum_{C \in \eta_g} N_C g_C. \quad (2.104)$$

Note que g^h é constante, de modo que o último termo da expressão (2.101) é igual a zero.

As funções $N_i(r, z)$ em (2.103) e (2.104), são denominadas funções de forma. Introduzindo (2.103) em (2.101), segue que

$$\sum_{A \in \eta_h} d_A [a(N_A, \kappa v^h) + (N_A, \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial v^h}{\partial t})] = \sum_{A=1}^M d_A [(N_A, \hat{f})^{\partial \mathcal{B}_2} + (N_A, \check{f})^{\partial \mathcal{B}_3} - a(N_A, \kappa g^h)],$$

Uma vez que a condição deve ser satisfeita para $\forall w \in \nu^h$, segue que

$$a(N_A, \kappa v^h) + (N_A, \frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial v^h}{\partial t}) = (N_A, \hat{f})^{\partial \mathcal{B}_2} + (N_A, \check{f})^{\partial \mathcal{B}_3} - a(N_A, \kappa g^h), \quad (2.105)$$

com $A \in \eta_h$.

Como $v^h \in \nu^h$, segue que

$$v^h(r, z, t) = \sum_{B \in \eta_h} N_B(r, z) d_B, \quad (2.106)$$

em que $d_B = d_B(t)$. Aplicando (2.106) na equação (2.105), obtém-se

$$\sum_{B \in \eta_h} [d_B a(N_A, \kappa N_B) + \frac{\partial d_B}{\partial t} (N_A, \frac{\kappa}{\alpha} N_B)] = (N_A, \hat{f})^{\partial \mathcal{B}_2} + (N_A, \check{f})^{\partial \mathcal{B}_3} - a(N_A, \kappa g^h), \quad (2.107)$$

com $A \in \eta_h$.

Introduzindo agora (2.104) em (2.107), segue que

$$\sum_{B=1}^M [d_B a(N_A, \kappa N_B) + \frac{\partial d_B}{\partial t} (N_A, \frac{\kappa}{\alpha} N_B)] = (N_A, \hat{f})^{\partial \mathcal{B}_2} + (N_A, \check{f})^{\partial \mathcal{B}_3} - \sum_{C \in \eta_g} g_C a(N_A, \kappa N_C), \quad (2.108)$$

em que $A \in \eta_h$.

Pode-se então expressar o sistema de equações lineares (2.108) na forma matricial

$$Md + B \frac{\partial d}{\partial t} = F, \quad (2.109)$$

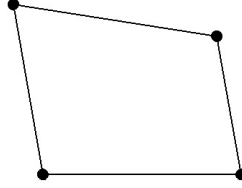
As matrizes de rigidez M , de massa B e de carregamento F podem ser expressas em termos das matrizes obtidas ao nível de cada elemento. Assim,

$$M = \sum_e^{n_{el}} M^e, \quad B = \sum_e^{n_{el}} B^e, \quad F = \sum_e^{n_{el}} F^e,$$

em que o sufixo e refere-se ao e -ésimo elemento da malha de elementos finitos e n_{el} é o número de elementos da malha e as matrizes M^e , B^e e F^e estão definidas abaixo.

Foram escolhidos elementos retangulares como ilustrado na Fig. 2.

Figura 2 – Elemento quadrilateral genérico.



Com base na expressão (2.96), considere a notação

$$a(v_1, v_2)^{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} v_1 v_2 dV, \quad (2.110)$$

em que \mathcal{V} é um volume arbitrário de \mathcal{B} .

Assim, as matrizes do e -ésimo elemento podem ser expressas como

$$M^e = \{\alpha_{ab}^e\}, \quad B^e = \{\beta_{ab}^e\}, \quad F^e = \{f_a^e\},$$

em que $a, b = 1 \dots 4$, e

$$\begin{aligned} \alpha_{ab}^e &= a(N_a^e, \kappa^e N_b^e)^{\mathcal{B}^e}, \\ \beta_{ab}^e &= (N_a^e, \frac{\kappa^e}{\alpha^e} N_b^e)^{\mathcal{B}^e}, \\ f_a^e &= (N_a^e, \hat{f})^{\partial \mathcal{B}_2^e} + (N_a^e, \check{f})^{\partial \mathcal{B}_3^e} - \sum_{c \in \eta_g \cap \eta_e} g_c a(N_a^e, \kappa^e N_c^e)^{\mathcal{B}^e}, \end{aligned}$$

em que \mathcal{B}^e corresponde a porção de \mathcal{B} referente ao e -ésimo elemento, $\partial \mathcal{B}^e$ a porção de $\partial \mathcal{B}$ referente ao e -ésimo elemento, $\partial \mathcal{B}_i^e = \partial \mathcal{B}^e \cap \partial \mathcal{B}_i$ e η_e o conjunto dos nós pertencentes ao e -ésimo elemento.

Tendo em vista a simetria axial, as expressões acima são reescritas em coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} \alpha_{ab}^e &= 2\pi \int_{\Omega^e} \kappa^e \nabla N_a^e \nabla N_b^e r dr dz, \\ \beta_{ab}^e &= 2\pi \int_{\Omega^e} \frac{\kappa^e}{\alpha^e} N_a^e N_b^e r dr dz, \\ f_a^e &= 2\pi \left[\int_{\partial \mathcal{B}_2^e} N_a^e \hat{f} r dr + \int_{\partial \mathcal{B}_3^e} N_a^e \check{f} - \sum_{C \in \eta_g \cap \eta_e} (g_c \int_{\Omega^e} \kappa^e \nabla N_a^e \nabla N_C^e r dr dz) \right], \end{aligned}$$

em que Ω^e é a área do elemento, e o gradiente $\nabla(\bullet)$, em coordenadas cilíndricas, é dado por

$$\nabla(\bullet) = \mathbf{r} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r} + \phi \frac{1}{r} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \phi} + \mathbf{z} \frac{\partial(\bullet)}{\partial z}, \quad (2.111)$$

em que \mathbf{r}, ϕ e \mathbf{z} são os versores nas direções radial, tangencial e longitudinal.

Assim, pode-se escrever as equações acima como

$$\alpha_{ab}^e = \kappa^e a(N_a^e, N_b^e)^{\Omega^e}, \quad (2.112)$$

$$\beta_{ab}^e = \frac{\kappa^e}{\alpha^e} (N_a^e, N_b^e)^{\Omega^e}, \quad (2.113)$$

$$f_a^e = (N_a^e, \hat{f})^{\partial \mathcal{B}_2^e} + (N_a^e, \check{f})^{\partial \mathcal{B}_3^e} - \sum_{C \in \eta_g \cap \eta_e} [g_C \kappa^e a(N_a^e, N_C^e)^{\Omega^e}]. \quad (2.114)$$

2.3.5 Transformação bilinear

A implementação das expressões (2.112) a (2.114) exige a integração em domínios de diferentes tamanhos, uma vez que não impomos a priori que todos os elementos sejam iguais. Será utilizada uma transformação linear, que permite a integração ao longo de um domínio local fixo $\square = (\xi, \eta) | -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$, dada por

$$r(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) r_a^e, \quad (2.115)$$

$$z(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) z_a^e, \quad (2.116)$$

em que

$$N_a = \frac{1}{4} (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta), \quad (2.117)$$

e $r_a^e, z_a^e, a = 1 \dots 4$, são as coordenadas radial e longitudinal, respectivamente, do e -ésimo elemento no sistema de coordenadas global.

O caso unidimensional é análogo,

$$r(\xi) = \sum_{a=1}^2 \bar{N}_a(\xi) r_a^e, \quad (2.118)$$

em que $\bar{N}_a = \frac{1}{2} (1 + \xi_a \xi)$.

A seguinte relação entre derivadas é fornecida por Hughes (2000),

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial r}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix},$$

em que $j = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi}$ é o Jacobiano da transformação.

Introduzindo a mudança de variáveis em (2.112), (2.113) e (2.114), obtém-se as fórmulas utilizadas para implementar o MEF, como se segue

$$a(N_a^e, N_b^e)^{\Omega^e} = \int_{A^\square} \nabla N_a(\xi, \eta) \nabla N_b(\xi, \eta) r(\xi, \eta) |j| dA^\square, \quad (2.119)$$

$$(N_a^e, N_b^e)^{\Omega^e} = \int_{A^\square} N_a(\xi, \eta) N_b(\xi, \eta) r(\xi, \eta) |j| dA^\square, \quad (2.120)$$

$$(N_a^e, \hat{f})^{\Gamma_B^e} = \int_{-1}^1 N_a \hat{f}(r(\xi)) r(\xi) \frac{dr(\xi)}{d\xi} d\xi, \quad (2.121)$$

$$(N_a^e, \check{f})^{\Gamma_B^e} = \int_{-1}^1 N_a \check{f}(r(\xi)) r(\xi) \frac{dr(\xi)}{d\xi} d\xi, \quad (2.122)$$

em que A^\square é a área do elemento no domínio \square .

2.3.6 Discretização no tempo

Introduzindo as expressões (2.103), (2.104) e (2.106) em (2.102), análogo ao que foi feito com a expressão (2.101), fornece

$$Bd|_{t=0} = d_0. \quad (2.123)$$

A expressão (2.109) juntamente com (2.123) corresponde a forma matricial da solução pelo MEF da equação (2.83), juntamente com as condições de contorno (2.84) a (2.85), e condição inicial (2.87).

De acordo com Hughes (2000), a matriz de massa B é positiva definida, o que permite utilizar a decomposição de Cholesky, dada por

$$B = G^T G. \quad (2.124)$$

Considere a mudança de variáveis $\pi = Gd$. Introduzindo em (2.109) e (2.123), obtém-se

$$\bar{A}\pi + \frac{\partial \pi}{\partial t} = \bar{F}, \quad (2.125)$$

$$\pi|_{t=0} = G^{-T} d_0, \quad (2.126)$$

em que $\bar{A} = G^{-T} M G^{-1}$ e $\bar{F} = G^{-T} F$.

Seja

$$\frac{\partial \pi^{[n]}}{\partial t} \approx \frac{\pi^{[n]} - \pi^{[n-1]}}{\tau}, \quad (2.127)$$

onde $\tau = \frac{t_n}{n}$, t_n é o tempo final e n é o número de passos no tempo. Utilizamos o passo atual n e o passo anterior, conhecido, $n - 1$ para estimar a derivada $\frac{\partial \pi}{\partial t}$, o que confere estabilidade numérica ao método. Este método corresponde ao método de Euler implícito. Introduzindo (2.127) em (2.125), segue que

$$\pi^{[n]} = (I + \tau \bar{A})^{-1} (\tau^{[n-1]} + \tau \bar{F})|_{t=t_n}, \quad (2.128)$$

em que I é a matriz identidade. Assim,

$$d^{[n]} = G^{-1} \pi^{[n]}, \quad (2.129)$$

fornece a temperatura em cada nó não prescrito da malha.

3 Termoelasticidade

3.1 Solução numérica

Analogamente ao que foi realizado na seção 2.3 para obter a solução numérica do problema da transferência de calor, inicialmente considere um corpo homogêneo. Como, ao final, as equações serão escritas a nível do elemento, pode-se definir as diferentes camadas especificando as propriedades termo-mecânicas de cada elemento em função do raio.

Supondo que o problema possui simetria axial, procura-se o campo de deslocamento $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $u^T = \{u_r, u_z\}$, em que u_r e u_z são as componentes radial e longitudinal do deslocamento, Ω é a secção longitudinal do cilindro e $\partial\Omega$ o seu contorno, que satisfaça a forma fraca da equação de equilíbrio dada por (ZIENKIEWICZ, 2006)

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta u^T t d\partial\Omega = 0, \quad (3.1)$$

em que σ é o tensor tensão, b é uma força de corpo, t é uma força de superfície, e

$$\epsilon^T = \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{u_r}{r}, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right\} \quad (3.2)$$

é o vetor deformação. A notação $\delta(\bullet)$ indica uma variação arbitrária do argumento (\bullet) .

Neste trabalho, as forças de corpo e de superfície são nulas e a deformação do corpo é devida somente à variação de temperatura no corpo. Assim, (3.1) toma a forma

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega = 0. \quad (3.3)$$

A relação constitutiva para materiais elásticos lineares é dada por

$$\sigma = D(\epsilon - \epsilon_0), \quad (3.4)$$

em que

$$D = \frac{E}{d} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

com $d = (1 + \nu)(1 - 2\nu)$ e

$$\epsilon_0 = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.4) em (3.3), obtemos

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T D \epsilon d\Omega = \int_{\Omega} \delta \epsilon^T D \epsilon_0 d\Omega \quad (3.7)$$

3.1.1 Formulação de Galerkin

Foi utilizada uma formulação de Galerkin do problema termoelástico, análogo ao que foi realizado na seção 2.3.3 para a determinação numérica do campo de temperatura, subdividindo \mathcal{B} em elementos poligonais. Seja N o número de nós resultante. Considere que o deslocamento é aproximados por

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{A=1}^N N_A(r, z) \tilde{u}_A, \quad (3.8)$$

em que $N_A(r, z)$ é uma função de forma referente ao A -ésimo nó e \tilde{u}_A é o deslocamento do A -ésimo nó. Por conveniência de notação, a contagem sobre A será omitida nas próximas equações.

Para o caso de simetria axial, o vetor deformação pode ser expresso como

$$\epsilon = Su, \quad (3.9)$$

em que

$$S = \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\bullet)}{\partial z} \\ \frac{(\bullet)}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\bullet)}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r} \end{Bmatrix}. \quad (3.10)$$

Introduzindo (3.8) em (3.9), obtemos

$$\epsilon \approx \tilde{\epsilon} = \sum_A B_A \tilde{u}_A, \quad (3.11)$$

em que

$$B_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_A}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_A}{\partial z} \\ \frac{N_A}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial N_A}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial N_A}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Introduzindo (3.11) nas variações $\delta(\bullet)$ em (3.7), segue que

$$\sum_A \delta \tilde{u}_A^T \left[\int_{\Omega} B_A^T D (\epsilon - \epsilon_0) \right] = 0.$$

Uma vez que o diferencial é arbitrário, resulta

$$\int_{\Omega} B_A^T D \epsilon d\Omega = \int_{\Omega} B_A^T D \epsilon_0 d\Omega, \quad A = 1 \dots N. \quad (3.13)$$

Substituindo agora ϵ dado pela expressão (3.11), em (3.13), fornece

$$\sum_{B=1}^N \int_{\Omega} B_A^T D B_B \tilde{u}_B d\Omega = \int_{\Omega} B_A^T D \epsilon_0 d\Omega, \quad A = 1 \dots N. \quad (3.14)$$

Pode-se escrever (3.14) matricialmente como

$$Ku = F, \quad (3.15)$$

em que

$$K = [K_{AB}], \quad K_{AB} = \int_{\Omega} B_A^T D B_B d\Omega, \\ F = \{F_A\}, \quad F_A = \int_{\Omega} B_A^T D \epsilon_0 d\Omega.$$

3.1.2 Formulação no elemento

Pode-se compor as matrizes K e F a partir das matrizes dos elementos. Sejam K^e e F^e as matrizes referentes ao e -ésimo elemento, dadas por

$$K^e = [K_{ab}], \quad K_{ab} = \int_{\Omega^e} B_a^T D B_b d\Omega, \quad (3.16)$$

$$F^e = \{f_a\}, \quad f_a = \int_{\Omega^e} B_a^T D \epsilon_0 d\Omega, \quad (3.17)$$

em que Ω^e é a área do e -ésimo elemento e $a, b = 1 \dots 4$, pois foi utilizado o mesmo elemento quadrilateral apresentado na seção 2.3.4.

Seja a transformação linear

$$r(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) r_a^e, \quad (3.18)$$

$$z(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) z_a^e, \quad (3.19)$$

em que $N_a(\xi, \eta)$ é dado por (2.117), r_a^e é a coordenada radial do a -ésimo nó do e -ésimo elemento e z_a^e é a coordenada longitudinal do a -ésimo nó do e -ésimo elemento. Como o elemento de área é dado por $d\Omega = r dr dz$, a transformação fornece $d\Omega = |\det(J)| r(\xi, \eta) d\xi d\eta$, em que J é o jacobiano dado por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Assim, é possível implementar a rotina para o cálculo do campo de deslocamento.

3.1.3 Deformações

Uma vez obtido o campo de deslocamento, a abordagem utilizada para a determinação das deformações consiste em realizar uma média da deformação, considerando os elementos do entorno de um nó. Calcula-se a deformação no ponto central de cada um dos elementos no entorno do nó e admite-se que a deformação no ponto é a média destas médias. Pode-se expressar esta abordagem como

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{e=1}^{n_{ee}} \sum_{b=1}^4 [B_b \tilde{u}_b^e]_S A^e}{\sum_{e=1}^{n_{ee}} A^e}, \quad (3.21)$$

em que S e A^e denotam, respectivamente, o ponto central e a área do elemento avaliado e n_{ee} é o número de elementos no entorno do nó.

Como será utilizada a mudança de coordenadas, segue que

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{e=1}^{n_{ee}} \sum_{b=1}^4 [B(\xi, \eta)_b \tilde{u}_b^e]_{\xi=\eta=0} A^e}{\sum_{e=1}^{n_{ee}} A^e}. \quad (3.22)$$

3.1.4 Tensões

Para determinação das tensões foi utilizado procedimento análogo ao das deformações, de modo que a tensão média é dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_{e=1}^{n_{ee}} \sum_{b=1}^4 [D^e B_b \tilde{u}_b^e - D^e \epsilon_{0b}^e N_b^e]_S A^e}{\sum_{e=1}^{n_{ee}} A^e}, \quad (3.23)$$

em que

$$\epsilon_{0b}^e = \begin{Bmatrix} \alpha^e T_b \\ \alpha^e T_b \\ \alpha^e T_b \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.24)$$

Como será utilizada a transformação linear, segue que

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_{e=1}^{n_{ee}} \sum_{b=1}^4 [D^e B(\xi, \eta)_b \tilde{u}_b^e - D^e \epsilon_{0b}^e N(\xi, \eta)_b^e]_{\xi=\eta=0} A^e}{\sum_{e=1}^{n_{ee}} A^e}. \quad (3.25)$$

Assim, as expressões (3.22) e (3.25) permitem calcular, respectivamente, os campos de deformação e tensão.

4 Metodologia e Resultados

4.1 Problema térmico

4.1.1 Solução analítica

Realizou-se um estudo variando-se o número n de autovalores utilizados na solução analítica obtida para o problema definido na seção 2.1. Utilizando o procedimento apresentado na seção 2.2, obteve-se a solução analítica para o caso do cilindro composto por três camadas concêntricas ($N = 3$). Neste estudo, os cilindros têm dimensões $r_1 = 10^{-3}m$, $r_2 = 2 \times 10^{-3}m$, $r_3 = 3 \times 10^{-3}m$ e comprimento $l = 5 \times 10^{-3}m$. Foram utilizados $n = 2, 16, 32$ autovalores na série e considerou-se a solução em que $n = 32$ como a referência, em vista da convergência observada. Note que, ao utilizar n autovalores, a série resultante terá n^2 termos, e a rápida convergência da solução é observada mesmo para n relativamente baixo.

As condições de contorno utilizadas foram temperatura na superfície $\partial\mathcal{B}_1$ igual a zero, fluxo de calor na superfície $\partial\mathcal{B}_2$ igual a $10^6W/m^2$, fluxo nulo na superfície $\partial\mathcal{B}_2$ e temperatura inicial igual a $35^\circ C$.

As propriedades dos materiais utilizados são apresentadas na Tab. 1.

Tabela 1 – Propriedades térmicas dos materiais do cilindro composto.

Camada	$\kappa[W.m^{-2}]$	$\alpha[10^{-6}m^2.s^{-1}]$
1	387.6	114.1
2	202.4	85.9
3	418.7	170.4

A distribuição de temperatura, com $t = 10^{-3}s$, ao longo do raio variando-se o número de autovalores é mostrada nas figuras (3), (4) e (5), para $z = 0mm, 2.4mm$ e $5mm$, respectivamente. Note nestas figuras que a série converge rapidamente, com boa concordância entre as curvas de $n = 16$ a $n = 32$.

A distribuição de temperatura, com $t = 10^{-2}s$, ao longo do raio e variando-se o número de autovalores é mostrada nas figuras (6), (7) e (8), para $z = 0mm, 2.4mm$ e $5mm$, respectivamente. Note, nestas figuras, que a série converge rapidamente, com boa concordância entre as curvas de $n = 2$ e $n = 32$. Isto indica que, para tempos relativamente longos, não há necessidade de um grande número de componentes na série para se obter uma solução com baixo erro.

4.1.2 Comparação entre a solução analítica e numérica

A solução analítica com $n = 32$ autovalores será comparada à solução numérica obtida pelo MEF, utilizando uma malha de elementos retangulares de 15×25 elementos radial e longitudinalmente, respectivamente, sob as mesmas condições e dimensões especificadas na seção 4.1.1.

Para $t = 10^{-3}s$, a solução analítica e a solução numérica apresentam boa concordância, como pode ser observado nas figuras (9), (10) e (11). Note que as curvas praticamente se sobrepõem.

Utilizando o mesmo procedimento para $t = 10^{-2}s$, observa-se que as soluções mostram ainda boa concordância, conforme ilustrado nas figuras (12), (13) e (14) em que as curvas de temperatura obtidas analiticamente se sobrepõem as obtidas numericamente.

Figura 3 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-3}s$ em $z = 0$.

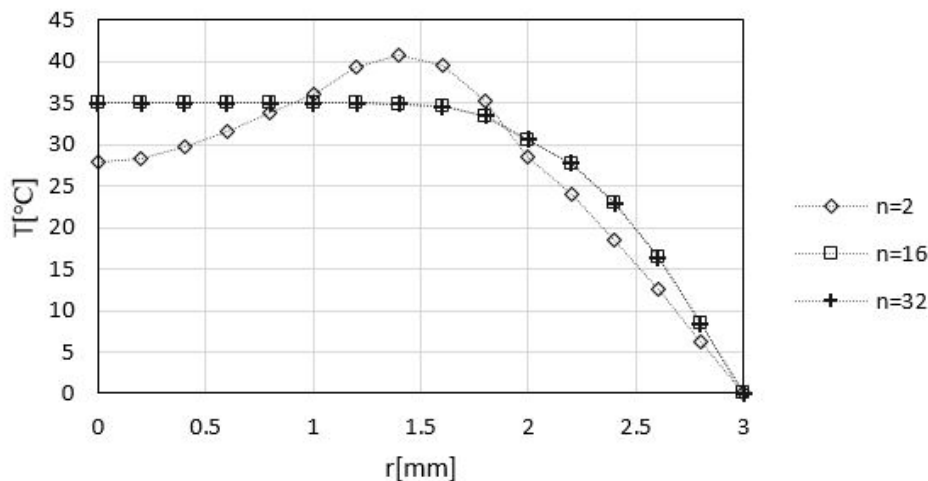
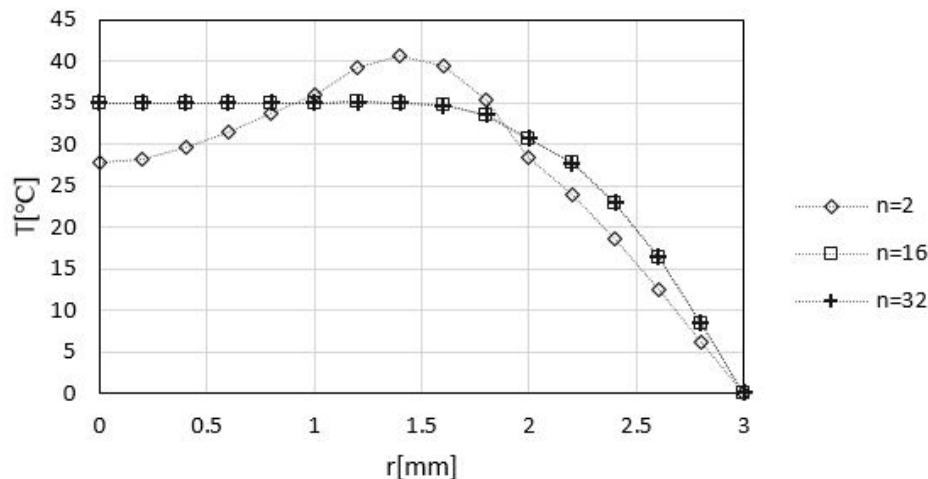


Figura 4 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-3}s$ em $z = 2.4mm$.



Observa-se, portanto, uma boa concordância entre as soluções analítica e numérica, validando o método numérico implementado.

4.2 Comparação da solução numérica com solução de software comercial

No capítulo 3, foi considerado um sólido livre de forças de superfície e de forças de corpo, sujeito apenas a uma carga térmica, para obter as expressões (3.15), (3.22) e (3.25), que permitem o cálculo do campo de deslocamento, de deformação e tensão, respectivamente. Estas expressões foram implementadas utilizando o software de computação simbólica *Mathematica*®.

Figura 5 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-3}s$ em $z = 5mm$.

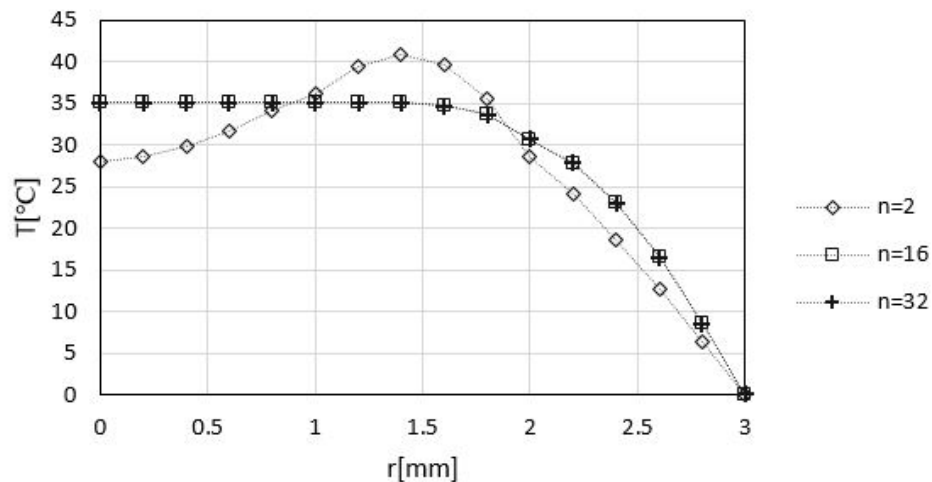


Figura 6 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-2}s$ em $z = 0$.

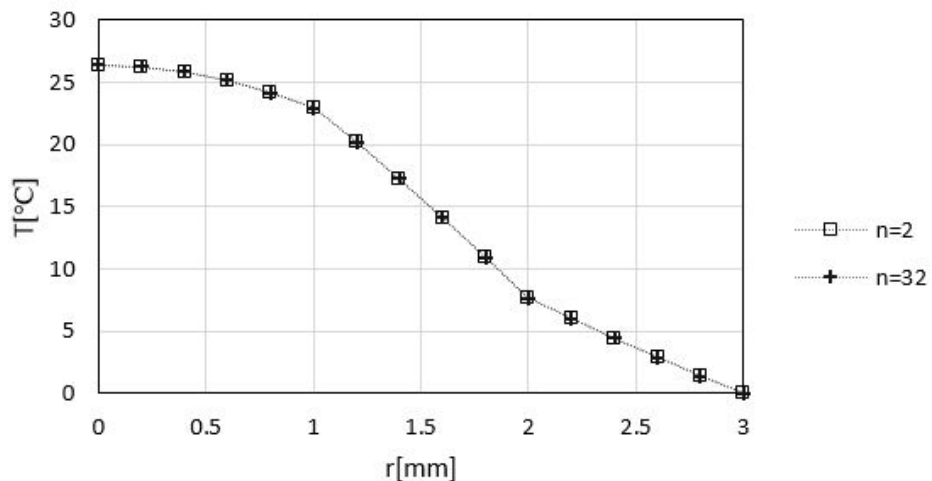


Figura 7 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-2}s$ em $z = 2.4mm$.

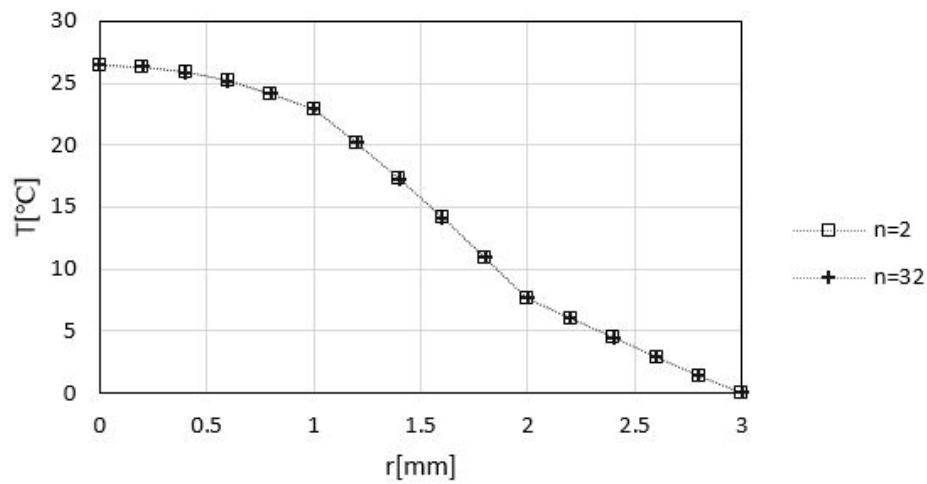


Figura 8 – Convergência da solução em função do número de autovalores n para $t = 10^{-2}s$ em $z = 5mm$.

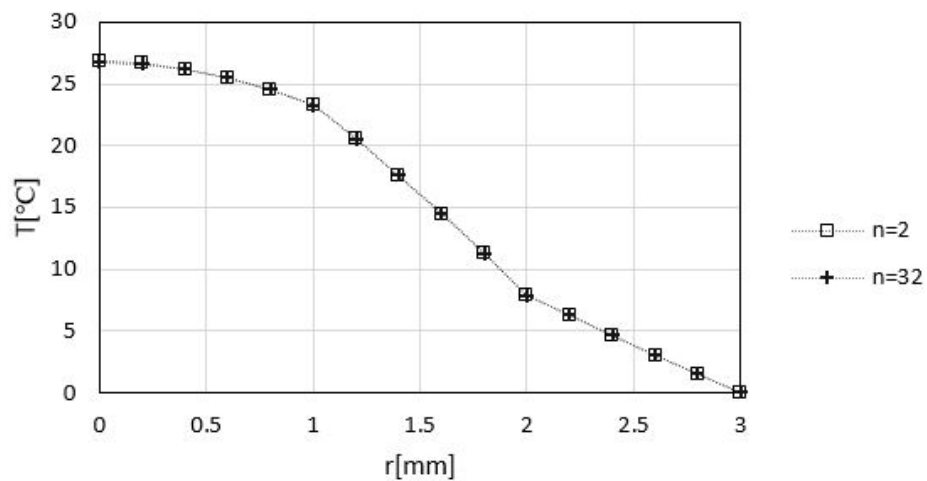


Figura 9 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-3}s$ em $z = 0$.

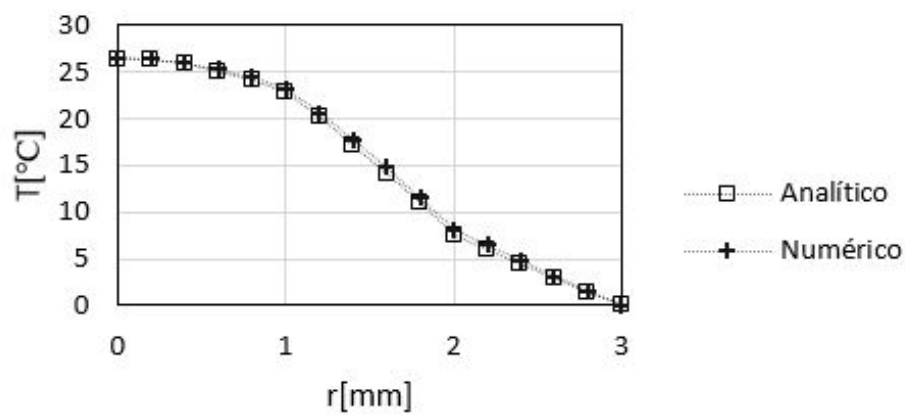
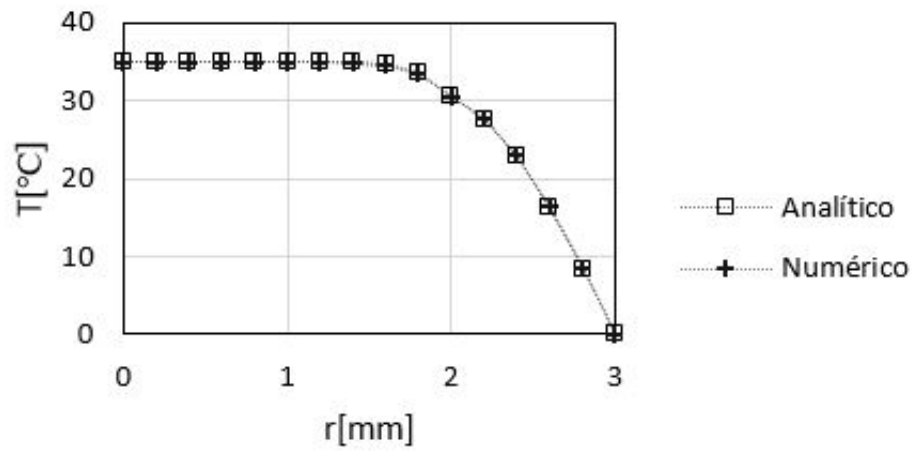
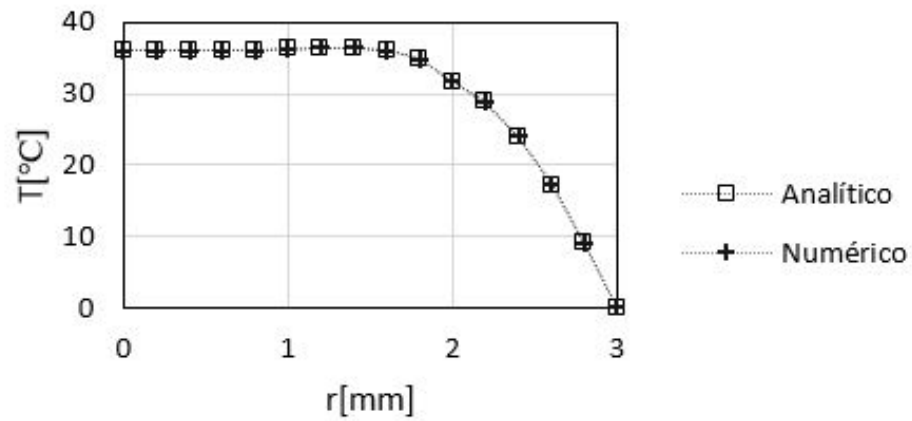
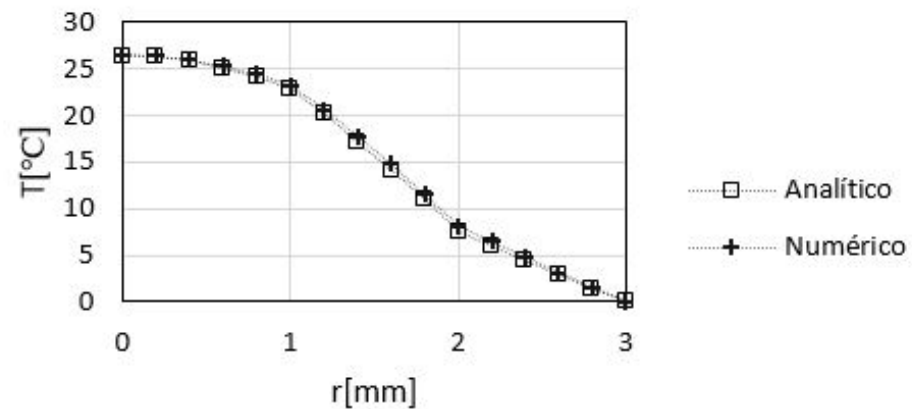


Figura 10 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-3}s$ em $z = 2.4mm$.Figura 11 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-3}s$ em $z = 5mm$.Figura 12 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-2}s$ em $z = 0$.

Para validação do método numérico implementado, foi realizado um estudo de convergência do campo de tensão variando-se o número de elementos utilizados. A malha foi refinada tanto radialmente quanto longitudinalmente. Foi dado foco na distribuição de tensão na extremidade do cilindro pois é a região de maior concentração de tensão. Os resultados obtidos utilizando nossa implementação foram comparados com os resultados fornecidos por um software MEF comercial. O software utilizado para este propósito foi o *Abaqus®6.13 Student Edition* que fornecia todos os requisitos necessários para modelar o mesmo problema, além de ser fornecido gratuitamente para propósitos acadêmicos. Uma desvantagem é que o número de nós utilizados no modelo é limitado a apenas 1000.

Deseja-se analisar um cilindro composto de três camadas de materiais distintos, sujeito a uma variação de temperatura uniforme, e comparar as soluções fornecidas pelo método implementado e pelo software comercial. A formulação desenvolvida no capítulo 3 permite que as propriedades termo-mecânicas de cada elemento sejam definidas independentemente. Desta forma, é possível especificar as diferentes propriedades em

Figura 13 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-2}s$ em $z = 2.4mm$.

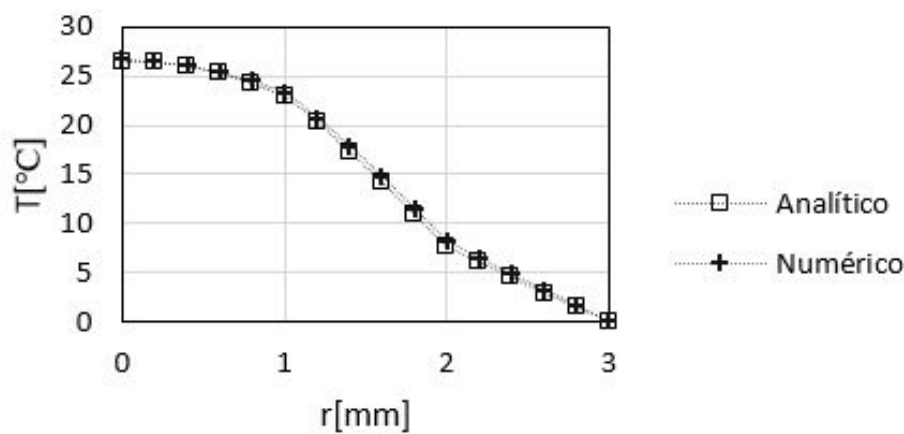
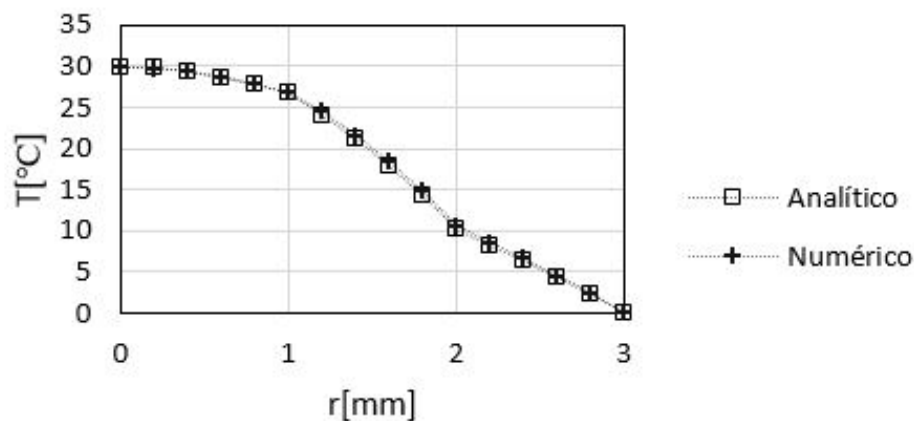


Figura 14 – Soluções analítica e numérica para $t = 10^{-2}s$ em $z = 5mm$.



função do raio e , assim, definir um sólido composto por três materiais distintos.

Para esta análise, sujeitou-se o sólido a uma variação de temperatura uniforme de 10°C . A imposição desta condição permite parametrizar o estudo apenas no cálculo das grandezas mecânicas, com uma distribuição de temperatura simples.

4.2.1 Modelagem no Abaqus

O *Abaqus*® fornece um ambiente de modelagem em simetria axial, de forma que não é necessário modelar um cilindro composto completo, porém apenas sua seção simétrica em torno do eixo longitudinal. Assim, foi possível estabelecer uma comparação entre os resultados obtidos do código implementado no *Mathematica* e aqueles que são fornecidos pelo Abaqus.

Para modelar o sólido, foi necessário criar três entidades distintas e acoplá-las. O acoplamento utilizado foi do tipo 'tie'. O elemento finito utilizado foi o *CAX4R*, que consiste no elemento finito bilinear de quatro nós de geometria axial para problemas de análise de tensão, análogo ao utilizado na formulação proposta neste trabalho. Utilizou-se uma malha de 24×35 elementos nas direções radial e longitudinal, respectivamente, em ambas as soluções. O cilindro tem dimensões $r_1 = 50\mu\text{m}$, $r_2 = 100\mu\text{m}$, $r_3 = 150\mu\text{m}$ e comprimento $l = 500\mu\text{m}$.

As condições de contorno impostas consistem no nó de coordenadas $(r, z) = (0, 0)$ fixo nas direções radial e longitudinal. O eixo de simetria pode se deslocar apenas longitudinalmente.

Os materiais utilizados em ambas as simulações estão listados na Tab.2, em que E é o módulo de elasticidade, ν o coeficiente de Poisson e α_L o coeficiente de expansão linear.

Tabela 2 – Propriedades dos materiais do cilindro composto.

Camada	E [GPa]	ν	$\alpha \cdot 10^{-5}$ [1/K]
1	45	0.3	0.5
2	4.5	0.4	11
3	1	0.3	30

4.2.2 Resultados numéricos

As tensões, as grandezas de principal interesse neste estudo, fornecidas pelo *Abaqus*® foram consideradas. Além disso, toma-se a coordenada $z = 0\mu\text{m}$ como referência tendo em vista a concentração de tensão presente nesta secção. Observa-se que nas interfaces,

as soluções apresentam alguma diferença conforme mostrado nas figuras (15), (16), (17) e (18), mas apresentam boa concordância longe das interfaces.

Na Fig. (17) observa-se boa concordância mesmo na interface. A tensão longitudinal, vista na Fig. (16), apresenta maior diferença nas interfaces. A diferença pode ser fruto de uma malha pouco refinada, pois no estudo de convergência realizado com nossa implementação, ainda há variação considerável da solução com uma malha mais refinada.

Figura 15 – Tensão radial σ_r para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$.

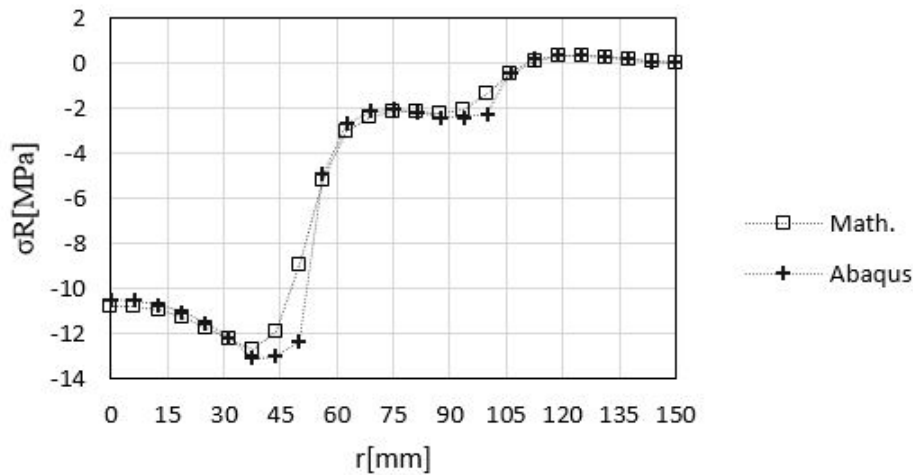
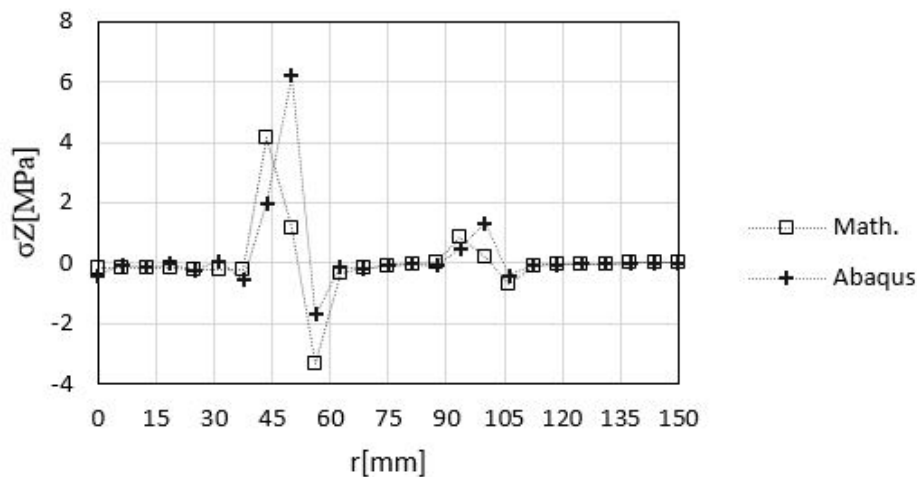


Figura 16 – Tensão longitudinal σ_z para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$.



Foi realizada análise de convergência da tensão no método implementado variando-se o número de elementos nr na direção radial com um número de elementos na direção longitudinal $nz = 20$. Observamos nas figuras (19), (20), (21) e (22) que conforme a malha é refinada, a tensão na interface tende a aumentar e convergir.

Na Fig. (19), observe que ao refinar a malha radialmente não há mudança significativa da solução, de modo que as curvas se sobrepõem. Já nas figuras (20) e (21), ao aumentar o número de elementos na direção radial, aumenta a magnitude da tensão nas interfaces. A Fig. (22) mostra uma queda de tensão na interface. Nas figuras (19) a (22), observa-se que longe da interface a solução permanece praticamente a mesma e as curvas aparecem sobrepostas.

Variou-se também o número de elementos n_z na direção longitudinal, mantendo o número de elementos $n_r = 24$ na direção radial fixo. Na Fig. (23) observa-se que a discretização longitudinal é importante na determinação da tensão na extremidade da fibra. A curva varia consideravelmente nas interfaces com o aumento do número de elementos. Um comportamento análogo é observado nas figuras (24), (25) e (26). Aqui foi utilizada uma malha mais refinada do que foi possível com o *Abaqus*.

Figura 17 – Tensão tangencial σ_T para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$.

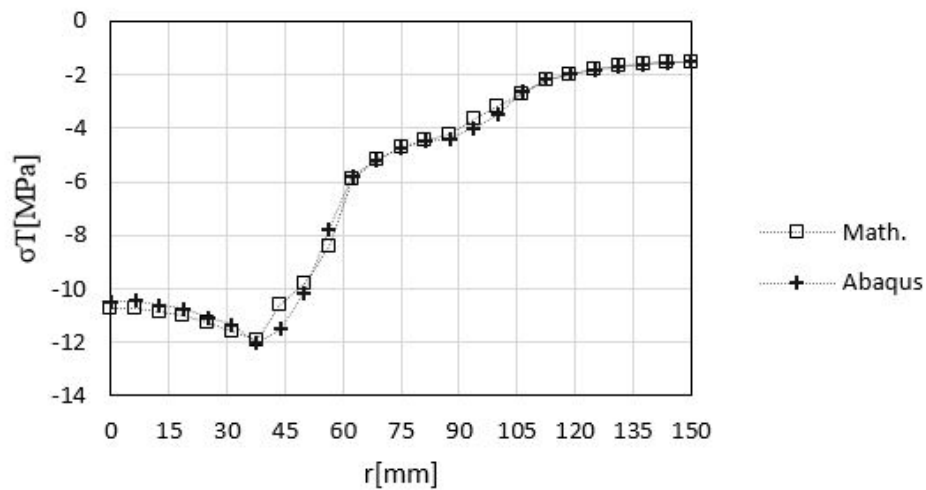


Figura 18 – Tensão cisalhante σ_{rz} para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$.

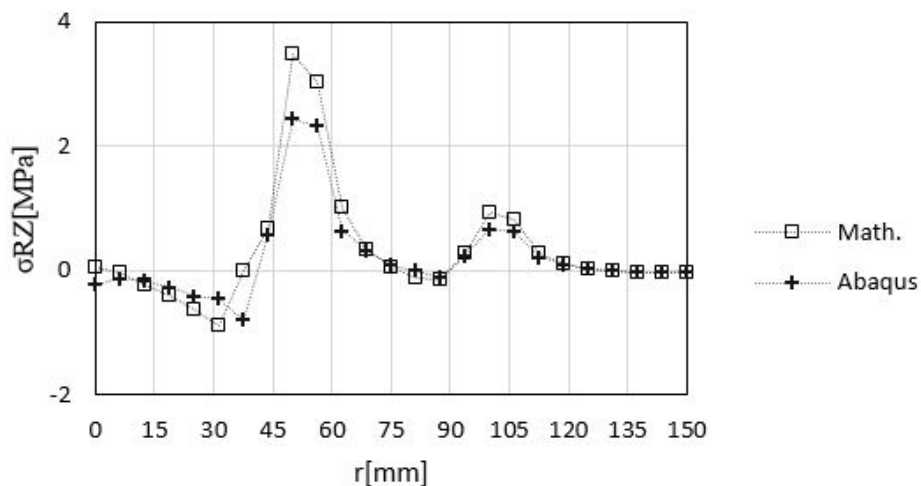


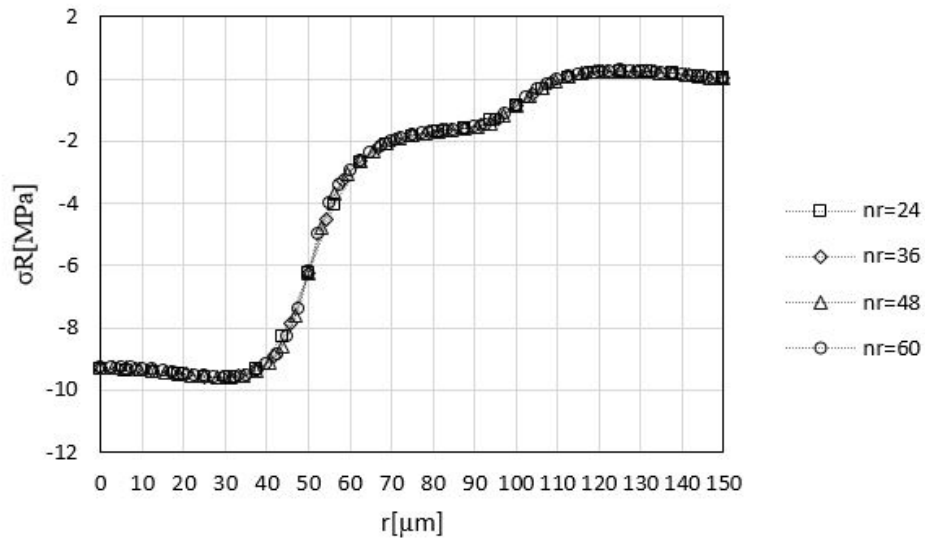
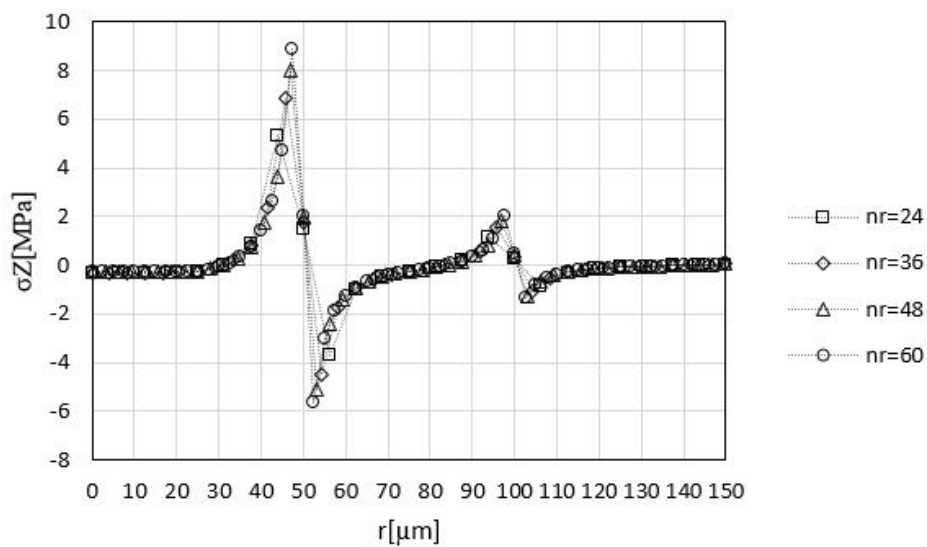
Figura 19 – Convergência da tensão radial σ_r para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $n_z = 20$.Figura 20 – Convergência da tensão longitudinal σ_z para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $n_z = 20$.

Figura 21 – Convergência da tensão tangencial σ_T para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $nz = 20$.

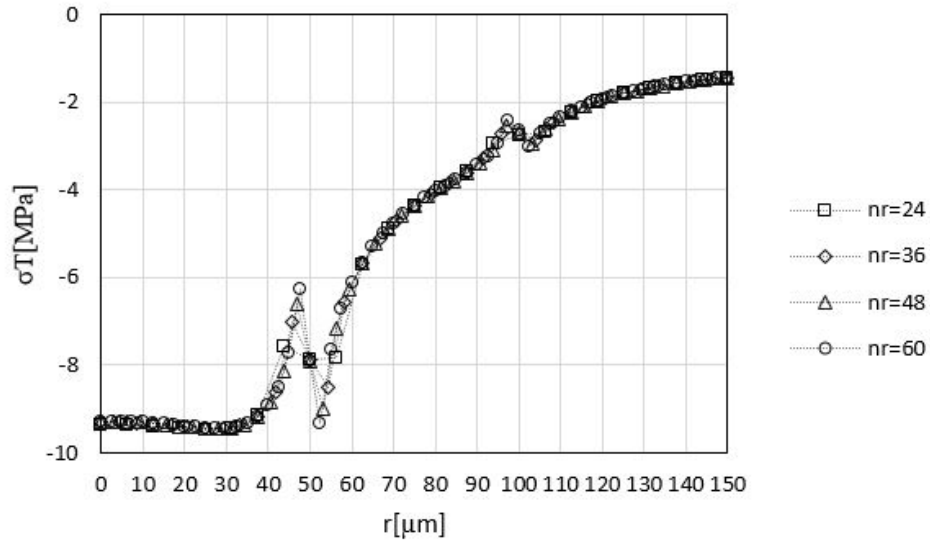


Figura 22 – Convergência da tensão cisalhante σ_{rz} para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $nz = 20$.

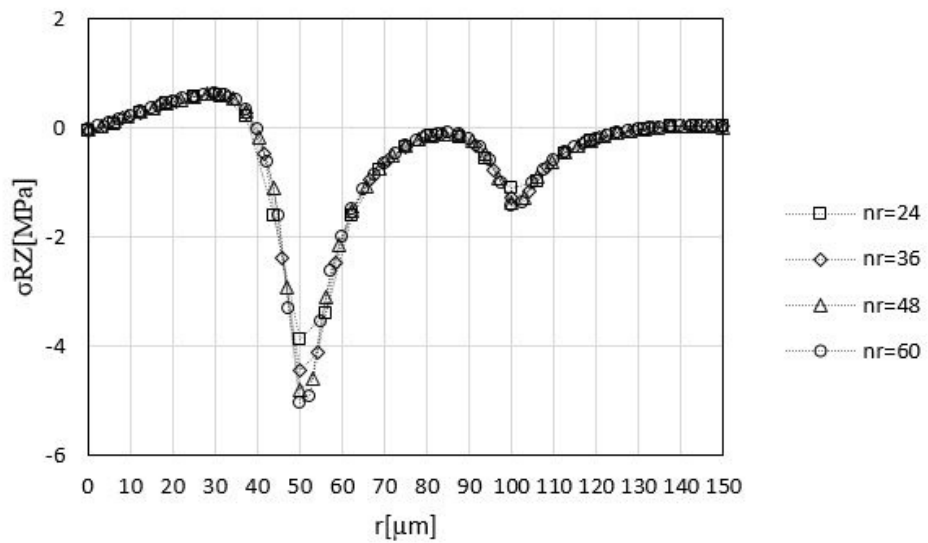


Figura 23 – Convergência da tensão radial σ_r para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $nr = 24$.

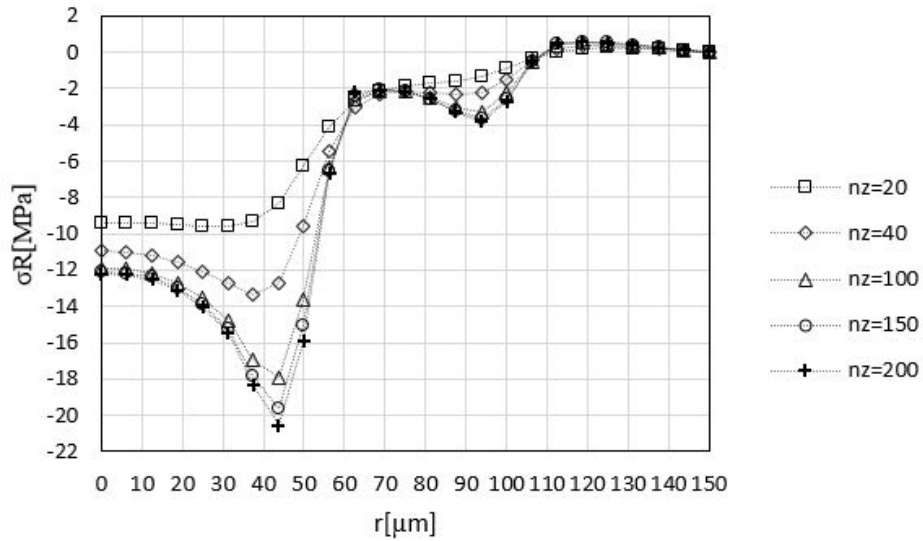


Figura 24 – Convergência da tensão longitudinal σ_z para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $nr = 24$.

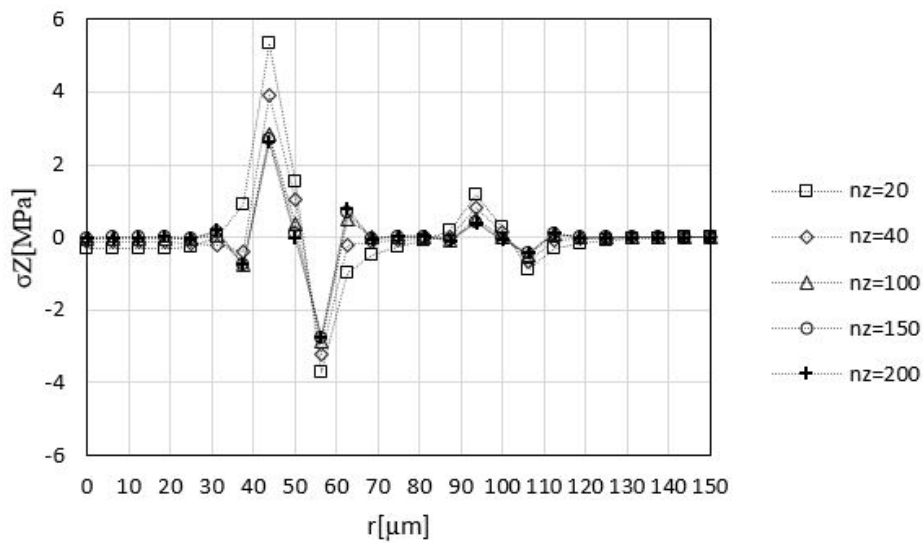


Figura 25 – Convergência da tensão tangencial σ_T para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $nr = 24$.

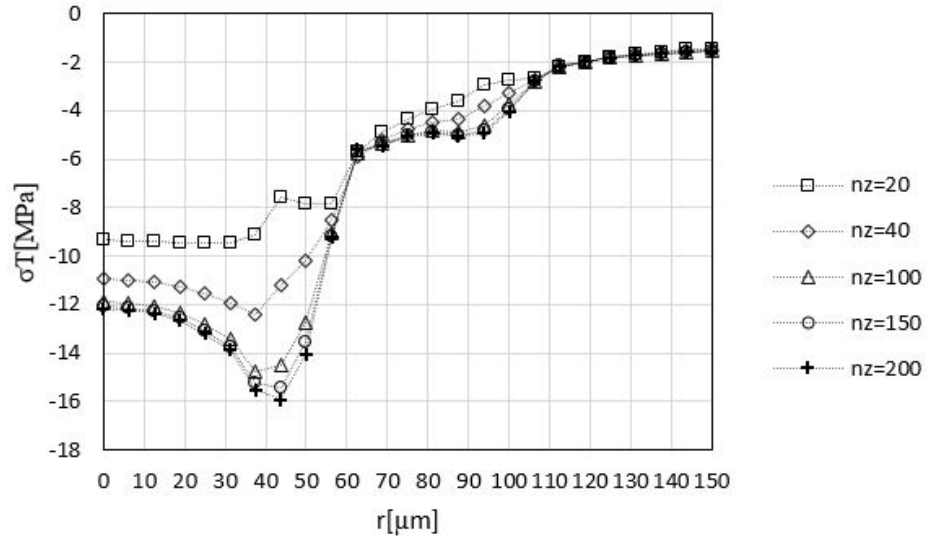
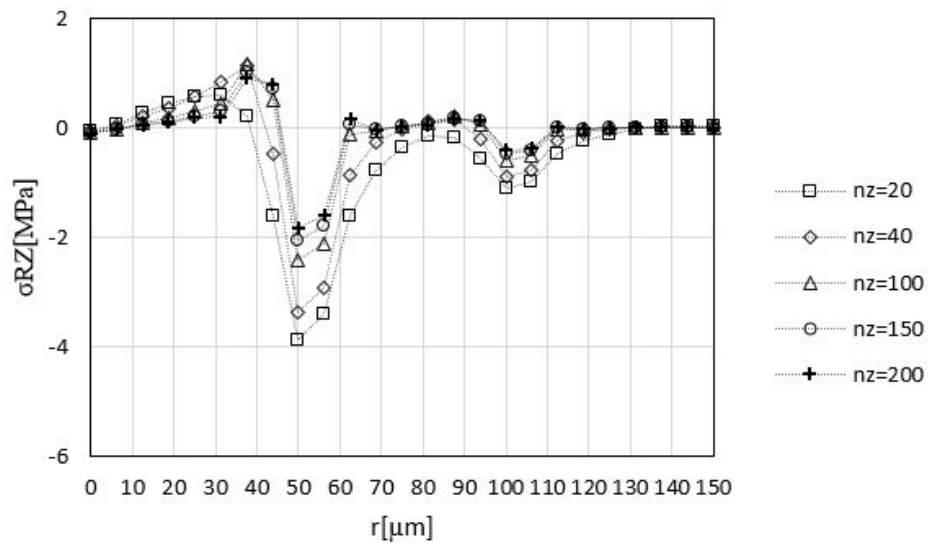


Figura 26 – Convergência da tensão cisalhante σ_{rz} para $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ em $z = 0$ com $nr = 24$.



4.3 Distribuição de temperatura e tensão na fibra óptica

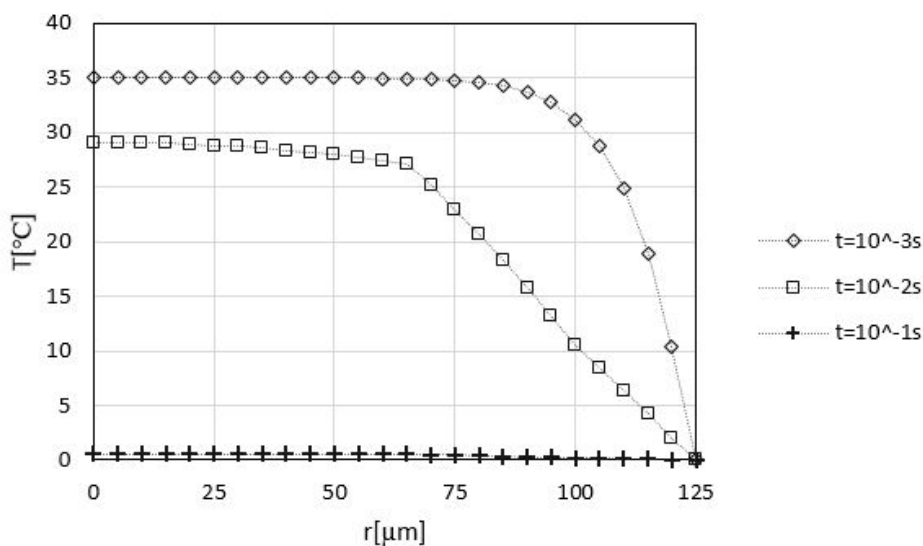
O código MEF implementado foi utilizado para a determinação, inicialmente, da distribuição de temperatura. A distribuição de temperatura obtida foi utilizada no cálculo das tensões radial, longitudinal, que contribuem potencialmente para o descolamento da interface, e a tensão tangencial. Utilizou-se uma malha de 25×100 elementos nas direções radial e longitudinal, respectivamente, e as propriedades geométricas, térmicas e mecânicas utilizadas no cálculo são apresentadas na Tab. 3.

Tabela 3 – Propriedades térmicas dos materiais do cilindro composto.

Camada	$r[\mu m]$	$\kappa[W.m^{-2}]$	$\alpha[10^{-7}m^2.s^{-1}]$	$E[GPa]$	ν	$\alpha_L[10^{-6}^{\circ}C^{-1}]$
1	62.5	1.114	5.901	70	0.22	9
2	100	0.171	1.034	0.00135	0.42	175
3	125	0.221	1.056	3	0.4	85

Neste caso, foi imposta uma temperatura inicial uniforme de $T = 35^{\circ}C$ em toda a fibra. Todas as condições de contorno no problema térmico são fixas iguais a zero, isto é, as faces laterais do cilindro são isoladas termicamente e a superfície é mantida a uma temperatura zero. O isolamento lateral implica que a distribuição de temperatura é independente da coordenada z . No entanto, como a fibra é finita, as tensões observadas serão diferentes na extremidade e no centro da fibra, com a condição mais crítica nas extremidades. A distribuição de temperatura obtida é mostrada na figura (27), para alguns instantes.

Figura 27 – Distribuição de temperatura na fibra óptica para alguns valores de tempo.



Aplicando esta distribuição de temperatura na solução numérica do problema termoelástico, resultam as tensões correspondentes. A tensão radial para $z = 0$ e

$z = 375\mu m$, é mostrada nas figuras (28) e (29), respectivamente. Estas secções foram tomadas para avaliar a diferença na distribuição de tensão na extremidade da fibra em comparação com o centro. Observe o aumento consistente da tensão de tração que pode ocasionar o descolamento da fibra.

As figuras (30) e (31) mostram a tensão longitudinal nos pontos $z = 0$ e $z = 375\mu m$, respectivamente, da fibra. Finalmente, as figuras (32) e (33) mostram a tensão tangencial nos pontos $z = 0$ e $z = 375\mu m$. Estas figuras ilustram a diferença entre as tensões observadas no meio da fibra em contraste com as tensões observadas nas extremidades. Uma vez que os modelos estudados na bibliografia, em sua maioria, adotam o modelamento unidimensional, não é possível observar o efeito das extremidades.

Figura 28 – Distribuição da tensão radial na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 0$.

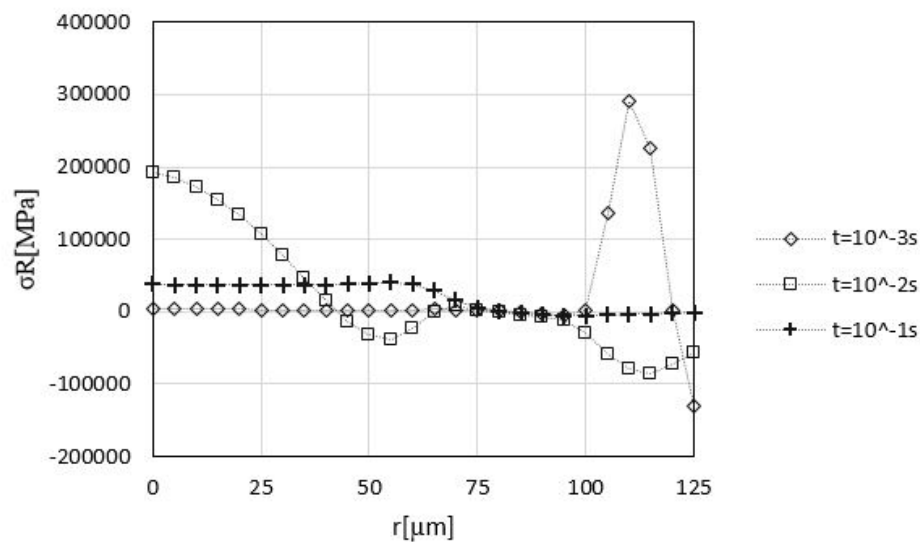


Figura 29 – Distribuição da tensão radial na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 375\mu m$.

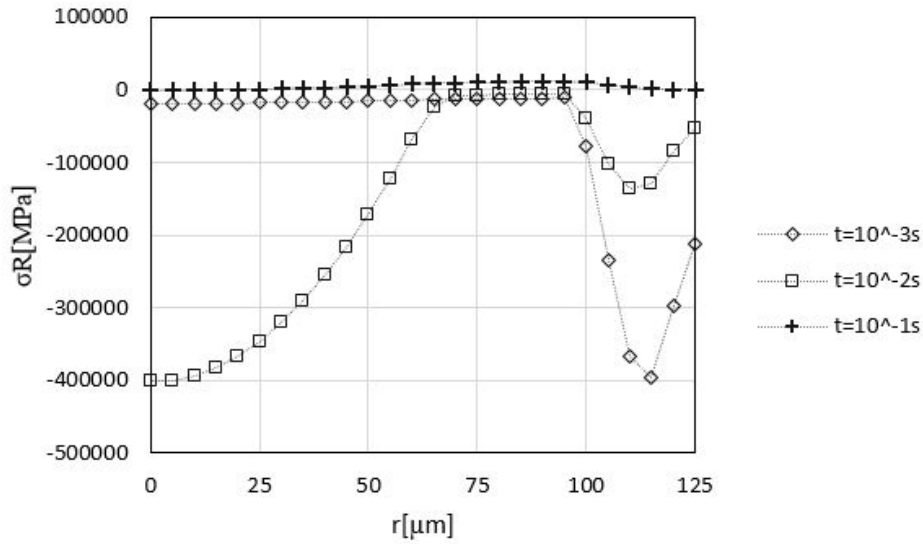


Figura 30 – Distribuição da tensão longitudinal na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 0$.

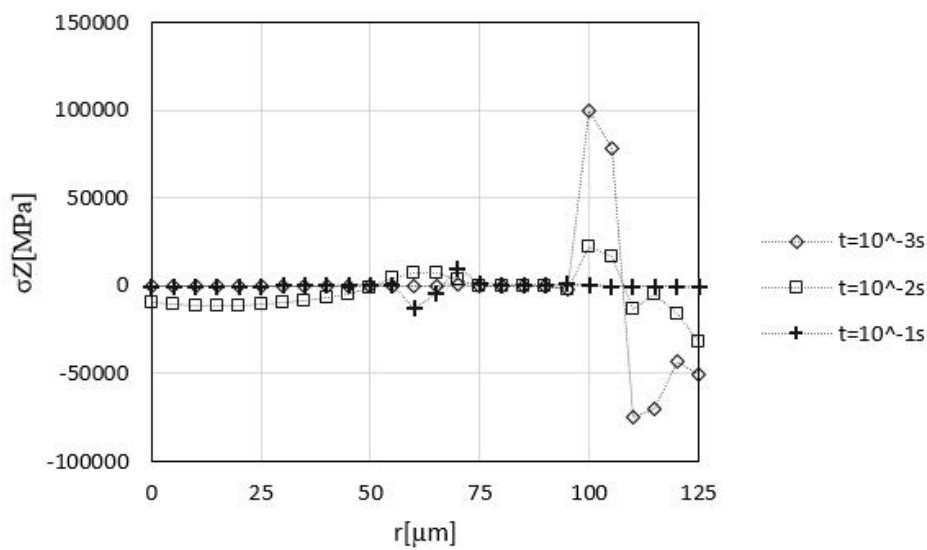


Figura 31 – Distribuição da tensão longitudinal na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 375\mu m$.

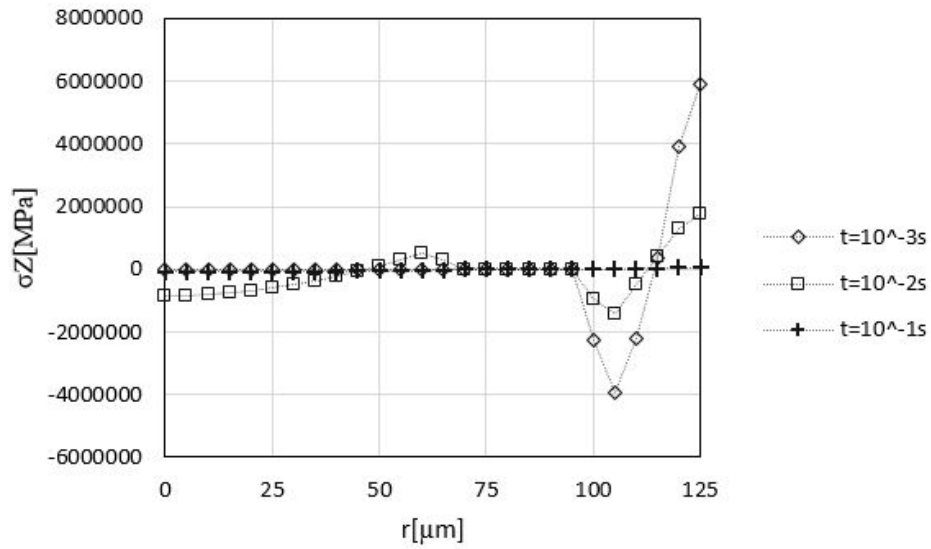


Figura 32 – Distribuição da tensão tangencial na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 0$.

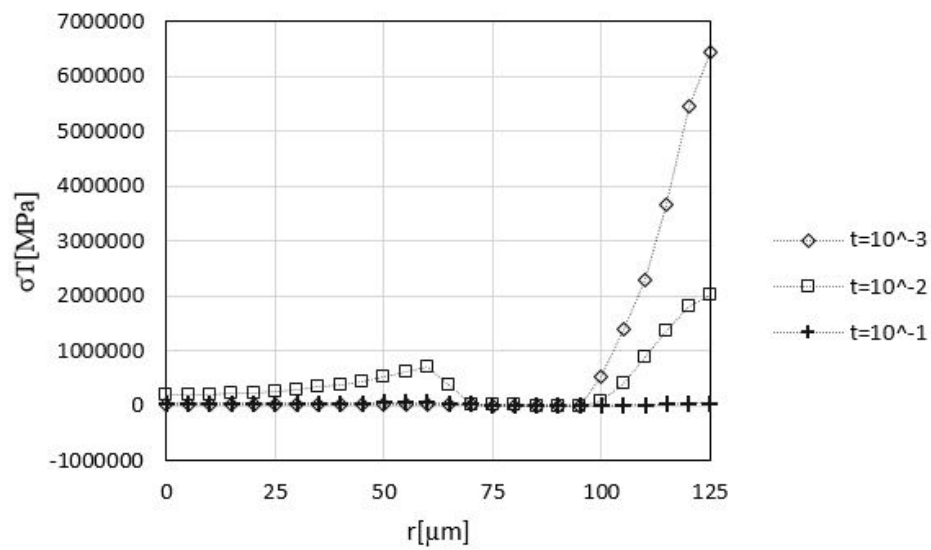
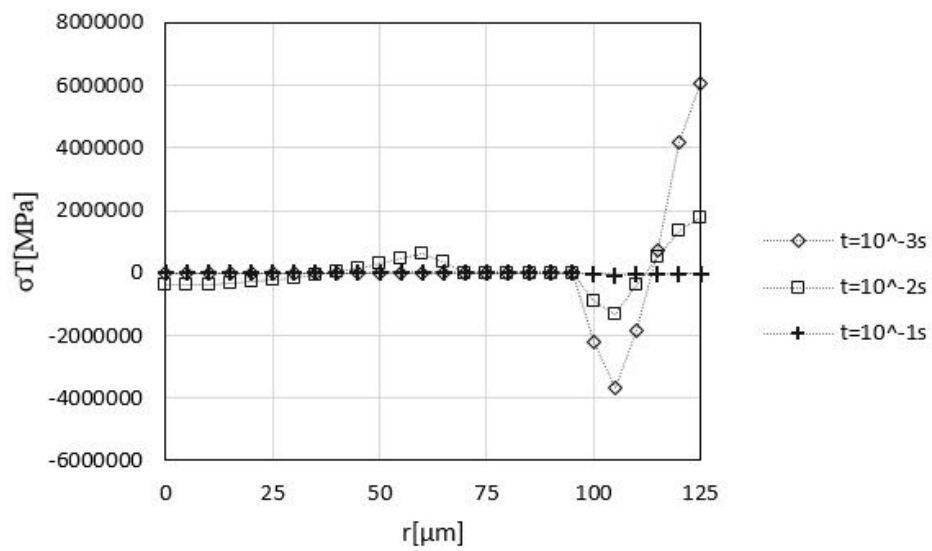


Figura 33 – Distribuição da tensão tangencial na fibra óptica para alguns valores de tempo em $z = 375\mu m$.



5 Conclusão

Neste trabalho, foi abordado o problema das tensões residuais térmicas em cilindro composto de diversas camadas concêntricas, com aplicação no cálculo de tensões residuais na fibra óptica. Foi utilizada a teoria da termoelasticidade linear clássica, e foi considerado que o campo de temperatura independe do campo de deslocamento. Também considerou-se a axissimetria da distribuição de temperatura para simplificação das equações governantes, motivados pela geometria da fibra óptica.

A distribuição de temperatura foi obtida analiticamente utilizando a separação de variáveis, conforme apresentado na seção 2.2. Este método fornece a distribuição de temperatura em termos de uma série infinita de autofunções e seus respectivos autovalores. Esta solução foi implementada utilizando o software de computação simbólica *Mathematica* com um número finito de termos na série. Observou-se a convergência da solução com o aumento do número de autovalores utilizados na série. Também foi calculada a distribuição de temperatura numericamente, utilizando o MEF, implementado utilizando *Mathematica*. De acordo com os resultados apresentados, o MEF implementado apresentou boa concordância com a solução analítica, conforme os gráficos discutidos no capítulo 4. A solução numérica é vantajosa pois permite a fácil implementação de número maior de camadas, sem a necessidade do cálculo de autovalores.

A solução numérica do campo de deslocamento desenvolvida no capítulo 3 foi implementada e realizou-se análise de convergência do campo de tensão, refinando-se a malha utilizada. Aplicando uma distribuição de temperatura uniforme, observou-se que, conforme refinamos a malha, as tensões radial, longitudinal, tangencial e cisalhante convergem. Observa-se que as interfaces são as regiões de maior dificuldade para a convergência.

Foram utilizadas a geometria e materiais típicos de uma fibra óptica para o cálculo das tensões residuais. Inicialmente, foi obtida a distribuição de temperatura transiente utilizando-se o código MEF implementado. A distribuição de temperatura resultante foi aplicada no cálculo das tensões residuais, também utilizando o código implementado no software *Mathematica*. Observa-se a presença de tensão radial residual, porém de baixa magnitude, ou compressiva, em regime permanente. Neste caso, não foram observadas as tensões elevadas apresentadas em alguns artigos estudados na revisão bibliográfica, porém a distribuição de tensão depende fortemente das propriedades termo-mecânicas das camadas, assim como da espessura das camadas.

Neste trabalho, não estudamos critérios de falha na interface, para determinar quando

haveria falha da fibra por descolamento da interface. Como sugestões de melhora na modelagem, pode-se estender a aplicação a materiais viscoelásticos, assim como considerar critérios de falha que considerem não só a possibilidade de falha por tração, mas também por tensão cisalhante.

Referências

- BOLEY, B. A.; WEINER, J. H. *Theory of thermal stresses*. New York: John Wiley and Sons, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 24.
- BOLOTIN, V. V.; BOLOTINA, K. S. Thermoelastic problem for a circular cylinder of reinforced multilayer material. *Mekhanika Polimerov*, v. 3, n. 1, p. 136–141, 1967. Citado na página 13.
- BROWN, D. C.; HOFFMAN, H. J. Thermal, stress, and thermo-optic effects in high average power double-clad silica fiber lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v. 37, n. 2, p. 207–217, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- CHEN, S. S.; SHIUE, S. T. Theoretical analysis of the interfacial-shear-stress induced delamination of polymeric coatings from the glass fibers in double-coated optical fibers during temperature cycling. *Optical Fiber Technology*, v. 12, p. 268–275, 2006. Citado na página 15.
- FERRY, J. D. *Viscoelastic properties of polymers*. 3. ed. New York: Wiley, 1980. Citado na página 14.
- HUGHES, T. J. R. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Mineola, New York: Dover Publications, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 44, 48 e 49.
- OZISIK, M. N. *Heat conduction*. New York: John Wiley and Sons, 1980. Citado 6 vezes nas páginas 25, 28, 29, 33, 36 e 38.
- PAEK, U. C.; KURKJIAN, C. R. Calculation of cooling rate and induced stresses in drawing of optical fibers. *Journal of the American Ceramic Society*, v. 58, p. 330–335, 1975. Citado na página 13.
- PALAIS, J. C. *Fiber Optic Communications*. 4. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1998. Citado na página 13.
- PARLEVLJET, H. E. B. P. P.; BEUKERS, A. Residual stresses in thermoplastic composites - a study of the literature. part iii: Effects of thermal residual stresses. *Composites Part A: applied science and manufacturing*, v. 38, p. 1847–1857, 2006. Citado na página 13.
- REVENKO, V. P. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers. *Determination of the three-dimensional stress-strain state of a thick-walled two-layer cylinder*, v. 50, n. 3, p. 369–376, 2014. Citado na página 15.
- SHIUE, S.-T.; LEE, W.-H. Thermal stresses in carbon-coated optical fibers at low temperature. *Journal of Materials Research*, v. 12, n. 9, p. 2493–2498, 1997. Citado na página 14.
- SHIUE, S. T. et al. Humidity and temperature-dependence of the interfacial shear strength between the glass fiber and primary coating in double-coated optical fibers. *Materials Science and Engineering A*, v. 434, p. 202–206, 2006. Citado na página 15.

- SHIUE, S.-T.; PAN, L.-Y.; HSIAO, H.-H. Design of hermetically metal-coated optical fibers to simultaneously minimize thermally and hydrostatic pressure induced stresses. *Materials Chemistry and Physics*, v. 78, p. 518–524, 2002. Citado na página 14.
- SHIUE, S.-T.; SHEN, T.-Y. Effect of thermal stresses on the static fatigue of double-coated optical fibers. *Materials Chemistry and Physics*, v. 89, p. 159–163, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 15.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Teoria da Elasticidade*. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 15.
- TSUKROV, I.; DRACH, B. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers. *International Journal of Solids and Structures*, v. 47, p. 25–33, 2010. Citado na página 15.
- WARWICK, T. W. C. C. M. Development of composite coaxial cylinder stress analysis model and its application to sic monofilament systems. *Journal of the American Ceramic Society*, v. 26, p. 3817–3827, 1991. Citado na página 14.
- WIEDERHORN, S. M.; BOLZ, L. H. Stress corrosion and static fatigue of glass. *Stress Corrosion and Static Fatigue of Glass*, v. 53, n. 10, p. 543–548, 1970. Citado na página 14.
- ZIENKIEWICZ, O. C. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Amsterdam: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. Citado na página 51.