

Frederico Mamoru Watanabe

**Análise do Método de Gumbel
para cálculo de vazões de dimensionamento de
vertedouros**

São Carlos - SP

01/11/2013

Frederico Mamoru Watanabe

**Análise do Método de Gumbel
para cálculo de vazões de dimensionamento de
vertedouros**

Trabalho de conclusão de curso a ser apresentado como parte dos requisitos para obtenção de título de Engenheiro Eletricista.

Universidade de São Paulo - USP

Escola de Engenharia São Carlos

Engenharia Elétrica com Ênfase em Sistemas de Energia e Automação

Orientador: Frederico Fábio Mauad

São Carlos - SP

01/11/2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

W324a Watanabe, Frederico Mamoru
Análise do método de Gumbel para cálculo de vazões
de dimensionamento de vertedouros / Frederico Mamoru
Watanabe; orientador Frederico Fábio Mauad. São
Carlos, 2013.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com
ênfase em Sistemas de Energia e Automação) -- Escola de
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,
2013.

1. Vazões máximas de projeto. 2. Método de Gumbel.
3. Análise de distribuições de frequências. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Frederico Mamoru Watanabe

Título: “Análise do Método de Gumbel para cálculo de vazões de dimensionamento de vertedouros”

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado
em 26/11/2013,

com NOTA 9,0 (noventa), pela Comissão Julgadora:

Prof. Associado Frederico Fábio Mauad - (Orientador - SHS/EESC/USP)

Mestre Daniel Augusto Pagi Ferreira - (Doutorando - SEL/EESC/USP)

Mestre André Carmona Hernandes - (Doutorando - SEM/EESC/USP)

Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:
Prof. Associado Homero Schiabel

Este trabalho é dedicado às pessoas que sempre estiveram ao meu lado pelos caminhos da vida, me acompanhando, apoiando e principalmente acreditando em mim.

Agradecimentos

Durante estes últimos anos muitas pessoas participaram da minha vida. Algumas já de longas datas, outras mais recentemente. Dentre estas pessoas algumas se tornaram muito especiais, cada uma ao seu modo, seja academicamente ou pessoalmente e seria difícil não mencioná-las.

Ao meu orientador Frederico Fábio Mauad, por ter me apoiado, ter me dado a iniciativa e por ter me mostrado o caminho para que eu pudesse sempre seguir em frente. Obrigado pelos ensinamentos, atenção, amizade ao longo deste período.

Ao professor Dr. Evandro Luis Linhari Rodrigues, pela ajuda, apoio e incentivo.

A Jussara Ramos Zoia, por toda ajuda, atenção, dedicação e apoio.

Aos meus tios, João Batista de Paiva e Maria Stela Veludo de Paiva, por todos os ensinamentos, carinho, apoio, paciência, companhia durante todo este tempo. Obrigado por toda ajuda e as lições de vida que eu sempre irei levar comigo.

Aos meus amigos de São Carlos, que trilharam comigo esta jornada e sempre me apoiaram em tudo e hoje são como a minha família.

Aos meus amigos de Porto Velho, que apesar da distância sempre estiveram me apoiando.

A minha família, que são os pilares da minha vida e sem eles eu nunca teria ido tão longe.

*Pessoas vem e vão...
Importante é o que fica.
As lições, exemplos e os momentos.*

Resumo

O presente trabalho apresenta uma análise teórica e comparativa de métodos probabilísticos a fim de verificar a validade do método de Gumbel para estimar vazões de dimensionamento de veredouros para Pequenas Centrais Hidrelétricas, ou seja, vazões relativas a períodos de retorno de 500 à 1000 anos. Inicialmente foi feita uma breve revisão bibliográfica contendo tópicos necessários para a compreensão das análises que serão feitas. Na sequência foi implementada a metodologia de análise que se divide em duas etapas: Análise teórica e Teste comparativo. Na análise teórica foi mostrado que, para uma análise local de frequências, a qualidade das estimativas depende altamente da qualidade das amostras. Também foi mostrado que não existe a priori um método probabilístico específico que represente a distribuição de frequência das séries históricas de vazões máximas sendo, portando, necessário pré-selecionar distribuições de valores extremos candidatas a representar a série de vazões em questão. É necessário, então, utilizar métodos de aderência entre outros critérios, para assim poder verificar qual das distribuições melhor representará a distribuição de frequência empírica em análise. Feito esta análise, teórica iniciou-se a etapa de teste no qual foram selecionados os modelos Log Normal II, Log Normal III, Pearson III, Log Pearson III e Gumbel como funções candidatas a representar as séries de vazões máximas para 5 locais diferentes do Estado de São Paulo. Os dados foram coletados do site do Departamento de Águas e Energia Elétrica, para 5 postos fluviométricos de locais diferentes, sendo eles: São João, Ferreira das Almas, Turvo, Usina Ester e Americana Velha. Para cada amostra foram construídas suas séries de vazões máximas e, para cada série de vazões, foram verificadas quais das distribuições candidatas se encaixam para extrapolar os dados referentes a estas amostras. Com as distribuições selecionadas foram estimadas as vazões referentes aos períodos de retorno de 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos juntamente com seus respectivos intervalos de confiança e feita a comparação dos resultados obtidos. O teste mostrou que as distribuições de 2 parâmetros (Gumbel e Log Normal II) são mais estáveis do que as distribuições de 3 parâmetros, quanto ao dimensionamento de vazões extremas. O teste também mostrou que apesar de, as vezes, as distribuições de 3 parâmetros serem mais exatas, existe ainda muitas incertezas relacionadas à introdução de um terceiro parâmetro na distribuição.

Palavras-chaves: Vazões Máximas de Projeto; Método de Gumbel; Análise de distribuições de frequências.

Abstract

This work presents a theoretical and comparative analysis of probabilistic methods with the intent to prove the validity of the Gumbel method to estimate the flow measurement from sizing spillways projects of small hydroelectricity, in other words, rate of flows relative to the return period of 500 and 1000 years. Initially was made a brief bibliographic revision with the necessary topics for the understanding of the subject that have yet to come. Secondly was implemented a methodology of analysis that is divided in two steps: Theoretical analysis and comparative tests. The theoretical analysis showed that, for a local analysis of frequencies, the estimated quality rely on the quality of the samples. Was also showed that a specific probabilistic method that represents the distribution of frequency of the series of annually maximum flow measurement does not exist therefore is needed to pre-select distributions of extreme values that can represent the series of flow measurement in question. So it is needed to use methods of adherence and confidence intervals so that we can check which, of the distributions, will represent best the distribution of empiric frequencies in analysis. That being done, the stage of tests can begin, in which were selected the Log Normal II, Log Normal III, Pearson III, Log Pearson III and Gumbel models as candidate functions to represent the series of maximum flow measurement on 5 different places in the state of São Paulo. The collected data came from the site of the Department of Water and Electrical Energy, this data is relative to 5 different places them being: São João, Ferreira das Almas, Turvo, Ester plant and Americana Velha. For each sample, were built their own series of maximum flow measurement and for each serie of flow measurement, were verified which of the candidate distributions fits to assess the collected data to these samples. With the distributions being selected is possible to estimate the flow measurement relative to the return period of 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 and 10000 years along side with their respective confidence interval and the comparison of the collected data. The test showed that the distribution with 2 parameters (Gumbel and Log Normal I) are more stable than the other 3, as the sizing of the extreme outlets. This test also showed that despite sometimes the 3 parameters distributions be accurate there are still a lot of uncertainty due to the addition of a third parameter into the distribution.

Key words: Maximum Flow measurement; Gumbel Method; Analysis of frequency distribution

Lista de ilustrações

Figura 1 – Funções densidade e acumulada de probabilidades de uma variável contínua (Extraído de Pinto e Naghetthini (2007)).	33
Figura 2 – Fluxograma da metodologia implementada.	45
Figura 3 – Grafico Quantil-Quantil das distribuições ajustadas x distribuição empírica	55
Figura 4 – Gráficos das Vazões em função do período de retorno para a amostra do posto São João.	57
Figura 5 – Gráfico Quantil-Quantil das distribuições ajustadas x distribuição empírica	58
Figura 6 – Gráficos das Vazões em função do período de retorno para a amostra Ferreira das Almas.	58
Figura 7 – Grafico Quantil-Quantil das distribuições ajustadas x distribuição empírica	60
Figura 8 – Gráficos das Vazões em função do período de retorno para a amostra Usina Ester.	60
Figura 9 – Grafico Quantil-Quantil das distribuições ajustadas x distribuição empírica	62
Figura 10 – Gráficos das Vazões em função do período de retorno para a amostra Turvo.	62
Figura 11 – Grafico Quantil-Quantil das distribuições ajustadas x distribuição empírica	64
Figura 12 – Gráficos das Vazões em função do período de retorno para a amostra Americana Velha.	64
Figura 13 – 5E-012: São João	79
Figura 14 – 5E-003: Ferreira das Almas	79
Figura 15 – 4D-001: Usina Ester	79
Figura 16 – 5E-009: Turvo	79
Figura 17 – 4E-004: Americana Velha	80

Lista de tabelas

Tabela 1	– Período de retorno admitido para diferentes obras hidráulicas.	30
Tabela 2	– Descrição dos postos fluviométricos considerados.	46
Tabela 3	– Intervalo e tamanho das séries históricas de vazões máximas anuais de cada posto fluviométrico.	46
Tabela 4	– Características das séries de vazões máximas anuais por unidade de área.	47
Tabela 5	– Resultado do Teste de Grubbs & Beck (1972), para valores extremos Inferiores.	53
Tabela 6	– Resultado do Teste de Grubbs & Beck (1972), para valores extremos Superiores	53
Tabela 7	– Parâmetros estimados para as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 5E-012 (São João)	54
Tabela 8	– Resultados dos testes de aderência para as distribuições de probabilidades em relação a amostra do posto 5E-012 (São João), com $N=33$ e $alpha = 5\%$	54
Tabela 9	– Vazões para 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos de período de retorno e intervalos de confiança de 95% estimado com as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 5E-012 (São João).	56
Tabela 10	– Resultados dos testes de aderência para as distribuições de probabilidades em relação a amostra do posto 5E-003 (Ferreira das Almas), com $N=29$ e $alpha = 5\%$	58
Tabela 11	– Vazões para 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos de período de retorno e intervalos de confiança de 95% estimado com as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 5E-003 (Ferreira das Almas).	59
Tabela 12	– Resultados dos testes de aderência para as distribuições de probabilidades em relação a amostra do posto 4D-001 (Usina Ester), com $N=60$ e $alpha = 5\%$	60
Tabela 13	– Vazões para 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos de período de retorno e intervalos de confiança de 95% estimado com as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 4D-001 (Usina Ester).	61
Tabela 14	– Resultados dos testes de aderência para as distribuições de probabilidades em relação a amostra do posto 5E-009 (Turvo), com $N=32$ e $alpha = 0,05$	62

Tabela 15	– Vazões para 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos de período de retorno e intervalos de confiança de 95% estimado com as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 5E-009 (Turvo).	63
Tabela 16	– Resultados dos testes de aderência para as distribuições de probabilidades em relação a amostra do posto 4E-004 (Americana Velha), com $N=44$ e $\alpha = 0,05$	64
Tabela 17	– Vazões para 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos de período de retorno e intervalos de confiança de 95% estimado com as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 4E-004 (Americana Velha).	65
Tabela 18	– Parâmetros estimados para as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto Ferreira das Almas	77
Tabela 19	– Parâmetros estimados para as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto Usina Ester	77
Tabela 20	– Parâmetros estimados para as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto Turvo	77
Tabela 21	– Parâmetros estimados para as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto Americana Velha	77
Tabela 22	– Valores críticos de $T_{N,\alpha}$ do Teste de Grubbs & Beck (1972), para valores extremos inferiores, sendo N o tamanho da amostra e α , o nível de significância.	83
Tabela 23	– Valores críticos de $T_{N,\alpha}$ do Teste de Grubbs & Beck (1972), para valores extremos superiores, sendo N o tamanho da amostra e α , o nível de significância.	84

Lista de abreviaturas e siglas

CTH	Centro Tecnológico de Hidráulica
DAEE	Departamento de Águas e Energia Elétrica
FAP	Função Acumulada de Probabilidade
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FMP	Função Massa de Probabilidade
GEV	<i>Generalized Extreme Value</i>
IDF	Intensidade-Duração-Frequência
KS	Kolmogorv-Smirnov
MVS	Máxima Verossimilhança
PCH	Pequenas Centrais Hidrelétricas
Q-Q	Quantil- Quantil
RBSP	Rede Hidrológica Básica do Estado de São Paulo
USWRC	<i>United States Water Resources Council</i>

Lista de símbolos

D	Desvio padrão padronizado
$E(X)$	valor esperado de X
$L(\theta)$	função de verossimilhança
N	tamanho da amostra
$P_X(x)$	função acumulada de probabilidades (discreta)
Tr	tempo de recorrência
$U(\hat{\theta})$	sistemas de equações diferenciais em relação aos parâmetros $\hat{\theta}$
k	coeficiente de curtose
f_i	frequência relativa da observação x_i
$f_X(x)$	função densidade de probabilidades (contínua)
$p_X(x)$	função massa de probabilidades (discreta)
s	desvio padrão populacional
s^2	variância amostral
x_{Tr}	magnitude da variável (vazão ou chuva) atingida ou superada pelo menos uma vez em Tr anos
y	função logarítmica da variável x
y_{Tr}	função logarítmica da variável x referente ao período de retorno Tr
z	variável reduzida de uma distribuição de frequência qualquer
\bar{x}	média aritmética da variável aleatória x
α	parâmetro de escala
β	parâmetro de forma
γ	parâmetro de posição
χ^2	qui-quadrada
μ	média amostral

μ_y	média dos logaritmos de x
σ^2	variância amostral
σ	desvio padrão amostral
σ_y	desvio padrão dos logaritmos de x

Sumário

1	Introução	25
1.1	Justificativa	25
1.2	Descrição geral do trabalho	26
1.3	Objetivos	27
2	Revisão Bibliográfica	29
2.1	Considerações Gerais	29
2.2	Vazão Máxima	29
2.3	Estatísticas Básicas	29
2.3.1	Média	30
2.3.2	Variância e Desvio padrão	31
2.3.2.1	Variância	31
2.3.2.2	Desvio Padrão	31
2.3.3	Medidas de Assimetria e Curtose	31
2.3.3.1	Coefficiente de Assimetria	31
2.3.3.2	Coefficiente de Curtose	32
2.4	Distribuições de frequências e períodos de retorno	32
2.4.1	Distribuição de Frequências	32
2.4.2	Período de Retorno	34
2.5	Metodos Probabilísticos	34
2.5.1	Distribuição Log-Normal Tipo II	36
2.5.2	Distribuição Log-Normal Tipo III	37
2.5.3	Distribuição Gama tipo III ou Pearson tipo III	38
2.5.4	Distribuição Log-Pearson tipo III	39
2.5.5	Distribuição Tipo I de Fisher-Tippett ou Gumbel	40
2.6	Estimação dos parâmetros por meio da máxima verossimilhança	41
2.6.1	Definições	41
2.7	Diagrama Quantis-Quantis (Q-Q)	43
2.8	Intervalos de Confiança	43
3	Metodologia	45
3.1	Material e Consistência dos dados	46
3.1.1	Coleta de dados	46
3.1.2	Identificação e tratamento dos pontos atípicos ou <i>outliers</i>	47
3.2	Ajuste das distribuições aos dados de vazão máxima anual dos postos fluviométricos e Testes de Aderência para análise das distribuições	48

3.2.1	Teste Qui-Quadrado	49
3.2.2	Teste Kolmogorov-Smirnov	49
3.3	Estimativa das vazões máximas de projeto com tempos de retorno típicos de obras hidráulicas (PCH)	50
3.4	Intervalo de Confiança	50
4	Resultados e Discussão	51
4.1	Análise teórica	51
4.2	Amostras	52
4.3	Resultados para amostra do posto São João	54
4.3.1	Ajuste das distribuições	54
4.3.2	Estimativas das vazões para $T_r=500$, $T_r=1000$ anos e Intervalos de Confiança	55
4.4	Resultados para as amostras restantes	57
5	Conclusões e Recomendações	69
5.1	Conclusões	69
5.2	Recomendações	71
	Referências	73
	Apêndices	75
	APÊNDICE A Valores dos parâmetros ajustados às amostras	77
	APÊNDICE B Diagrama de frequência das amostras estudadas junto à suas respectivas Funções Densidade de Probabilidades candidatas ajustadas	79
	Anexos	81
	ANEXO A Valores críticos de T do Teste de Grubbs & Beck (1972), para valores extremos inferiores e superiores	83
	ANEXO B Valores Críticos da estatística D do teste de aderência KS	85
	ANEXO C Distribuição do Qui-Quadrado	87

1 Introdução

1.1 Justificativa

O termo previsão de enchentes aplica-se ao cálculo de uma enchente de projeto por extrapolação dos dados históricos para as condições mais críticas. Como exemplo, considera-se certa seção fluviométrica de um rio para a qual se dispõe de 30 anos de dados de vazão. Assim, a maior vazão observada tem a probabilidade aproximada de ocorrer, ou ser superada, uma vez a cada 30 anos. Se o problema for o cálculo da vazão máxima provável de acontecer uma vez a cada 100 anos, estar-se-á tratando, basicamente, da extrapolação de dados históricos para a previsão da enchente de 100 anos.

É interessante fazer a distinção dos conceitos de cheia (ou enchente) e inundação. A enchente caracteriza-se pela ocorrência da vazão relativamente grande do escoamento superficial, enquanto a inundação distingue-se pelo extravasamento do canal. Uma enchente pode ou não causar inundação. Obras de controle podem ser realizadas no rio para evitar a ocorrência da inundação. Por outro lado, a existência de alguma obstrução no escoamento natural do rio pode levar à inundação, mesmo não havendo grande aumento do escoamento superficial. Em suma, a enchente refere-se à uma ocorrência natural, cíclica, que normalmente não afeta diretamente os habitantes da região. Já as inundações são decorrentes de alterações no uso do solo e podem provocar danos de grandes proporções.

A análise de frequência de cheias tem como objetivo estabelecer a relação entre os valores de vazões máximas e os tempos de retorno ou de recorrência a elas associados. Esta análise baseia-se no exame probabilístico dos máximos registros fluviométricos anuais.

Quando no local existe uma série de vazões registradas, o procedimento clássico para estimar estes períodos de retorno consiste em :

- Construir a série de vazões extremas anuais (máximos ou mínimos);
- Ajustar uma distribuição de frequências teórica a esta série;
- A partir da distribuição ajustada, estima-se os períodos de retorno de vazões extremas, ou estima-se as vazões com determinado período de retorno.

Se o local não tem uma série registrada, geralmente são utilizados estudos regionais de vazão ou modelos de transformação precipitação-vazão (curvas IDF).

Geralmente as distribuições de frequência são feitas com 30 à 60 anos de dados e até menos, e extrapoladas a períodos de retorno de 100 anos ou mais. Estes períodos de

dados nem sempre garantem a representatividade da série, já que não necessariamente toda a variabilidade das vazões da bacia ocorre nestes anos.

Diante da necessidade de conhecer o comportamento das vazões locais de uma bacia para que se possa construir uma barragem a fim de aproveitar o seu potencial hidroelétrico, por exemplo, é que são realizados estudos de vazões extremas. Como se trata de uma questão em que a falha do projeto pode causar uma calamidade local, a necessidade de um bom estudo da hidrologia do local se torna essencial. A distribuição de Gumbel é uma das ferramentas mais utilizadas nos dias de hoje, no que diz respeito à extrapolação de series históricas de valores extremos para se determinar vazões máximas de projeto (dimensionamento de vertedouros). Este é o motivo pelo qual esse modelo de distribuição será estudado neste trabalho com o intuito de se conhecer melhor sobre a sua validade quanto à análise de frequências de distribuição de vazões máximas e a estimação de cheias de projeto (vazões de projeto de vertedouros), uma vez que o mesmo é utilizado para assuntos muito delicados.

1.2 Descrição geral do trabalho

Neste trabalho será apresentado inicialmente uma breve revisão bibliográfica de conceitos de estatística e de hidrologia, para facilitar a compreensão do que aqui será desenvolvido.

Serão revisados os conceitos noção de estatística básica, e cálculos de estatística. Serão apresentados os conceitos de distribuições de frequência com modelos exemplos e métodos de estimação de seus parâmetros. Será feito, também, uma breve revisão sobre variáveis hidrológicas e suas características, bem como os conceitos de vazões máximas.

Após este pacote de revisão bibliográfica, será implementado uma teste comparativo entre modelos de distrições de frequências, com o intuito de validar a utilização do Método de Gumbel para predição de vazões máximas.

Por fim serão discutidos os resultados obtidos e feita uma conclusão sobre os mesmos.

1.3 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é verificar a validade do método de Gumbel quando aplicado para os cálculos das vazões de dimensionamento de vertedouros.

Para a consecução do objetivo geral foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Análise teórica do Método de Gumbel quanto a sua validade para análise de frequências locais e estimativas de vazões extremas a partir do mesmo;
- Estimar vazões máximas de dimensionamento de vertedouros, por diferentes modelos probabilístico pré-selecionados;
- Comparar os resultados obtidos e avaliar por comparação o método de Gumbel.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Considerações Gerais

Ao longo das próximas seções serão apresentados alguns dos princípios fundamentais para a estimativa de vazões de projeto e uma síntese das ferramentas matemáticas e estatísticas utilizadas neste trabalho. Além disso, será apresentada uma breve revisão dos modelos de distribuição de frequência analisados.

2.2 Vazão Máxima

"A vazão máxima de um rio é entendida como sendo um valor associado a um risco de ser igualado ou ultrapassado (período de retorno)." (Santos (2010), p. 48).

A ocorrência de enchentes em períodos de chuvas intensas é um fenômeno natural e cíclico em uma bacia hidrográfica. No entanto, uma grande vazão não está associada apenas a chuvas intensas. De acordo com Mota (2003), precipitações de pequena intensidade, no entanto de longa duração, provocam sérios riscos sociais e materiais na maioria das cidades brasileiras.

Apesar da ocorrência natural das enchentes, boa parte delas poderiam ser evitadas através de adoção de medidas não-estruturais, que exigem um planejamento da bacia (como o reflorestamento) e através de medidas estruturais, como a realização das obras hidráulicas. No entanto, as obras hidráulicas geralmente subestimam a necessidade da bacia, utilizando-se de períodos de retorno muito pequenos, comprometendo os custos e a segurança dos projetos de engenharia.

Para grandes barragens exige-se um risco mínimo, pois o impacto causado pelo seu rompimento é altamente destrutivo. O risco adotado para um bueiro é de 2 a 10 anos, pois se aceita que as ruas poderão se inundadas com a referida frequência. Já obras como barragens, adota-se um período de retorno elevado, uma vez que o estrago causado pela sua falha é extremamente preocupante.

A Tabela 1 mostra os períodos de retorno admitidos para alguns exemplos de obras hidráulicas.

2.3 Estatísticas Básicas

Segundo Meyer (1970), as estatísticas descritivas de uma amostra aleatória de dados hidrológicos são medidas-resumo que sintetizam, de modo simples e econômico,

Tabela 1 – Período de retorno admitido para diferentes obras hidráulicas.

Obra Hidráulica	Período de retorno (anos)
Bueiros	2 a 10
Galeria de águas pluviais	5 a 20
Pequenas barragens de concreto para abastecimento de água	50 a 100
Canalização a céu aberto trapezoidal	50
Canalização a céu aberto retangular	100
Travessias: pontes, bueiros e estruturas afins	100
Barragem de concreto	500
Extravasador de uma barragem de terra	1000
Vertedor de grandes barragens	10000

Fonte: Adaptado de (VILLELA; MATTOS, 1975), Tucci (2002) e DAEE (1994)

o padrão de distribuição da variável em questão. Além disso, as estatísticas descritivas apresentam uma importante vantagem, em relação à apresentação gráfica de dados, que é representada pelo seu uso na estatística inferencial, ou seja, o de extrair da amostra as informações necessárias para inferir o comportamento populacional. As estatísticas descritivas que serão utilizadas aqui são: média, desvio padrão, variância, coeficiente de assimetria e de curtose.

2.3.1 Média

Se uma amostra de tamanho N é constituída pelos elementos $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, a média aritmética, ou simplesmente média, de X é dada por

$$\bar{x} = \frac{x_1, x_2, \dots, x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.1)$$

Se, das N observações da variável X , N_1 forem iguais a x_1 , N_2 forem iguais a x_2 e assim por diante até o k -ésimo valor amostral, então a média de X pode ser obtida por

$$\bar{x} = \frac{N_1 x_1, N_2 x_2, \dots, N_k x_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k N_i x_i \quad (2.2)$$

Analogamente, se f_i denotar a frequência relativa da observação x_i , a equação 2.2 pode ser re-escrita como

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k f_i x_i \quad (2.3)$$

2.3.2 Variância e Desvio padrão

2.3.2.1 Variância

Novamente, segundo (MEYER, 1970), uma prática nas medidas de dispersão, é elevar ao quadrado os desvios em relação à média. Para uma amostra $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, define-se a variância amostral como o desvio quadrático médio, dado pela seguinte equação:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.4)$$

A variância populacional, denotada por σ^2 , pode ser estimada sem viés¹ por meio da seguinte correção da equação 2.4:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (2.5)$$

2.3.2.2 Desvio Padrão

A variância é expressa em termos do quadrado das dimensões da variável original. Para conservar as unidades da variável, define-se o desvio padrão σ como a raiz quadrada do desvio quadrático médio, ou seja, a raiz quadrada da variância σ^2 , tal como calculada pela equação 2.5. Formalmente, o desvio padrão é definido pela seguinte expressão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2} \quad (2.6)$$

2.3.3 Medidas de Assimetria e Curtose

2.3.3.1 Coeficiente de Assimetria

Para uma amostra $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, define-se o coeficiente de assimetria pelo número adimensional dado por:

$$g = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^3}{\sigma^3} \quad (2.7)$$

Na Equação 2.7, à exceção do primeiro quociente do segundo membro, o coeficiente g reflete e acentua a contribuição acumulada dos desvios positivos e negativos, em relação à média amostral. De fato, desvios positivos muito grandes, ou negativos muito grandes,

¹ O termo “viés” é usado para indicar que, em média, não existe diferença entre a variância populacional e sua estimativa pela equação corrigida.

quando elevados à terceira potência, serão grandemente acentuados. A predominância, ou a equivalência desses desvios, quando somados, irá determinar se o coeficiente de assimetria será positivo, negativo ou nulo. Segundo Meyer (1970), se o coeficiente g é positivo, diz-se que a curva da função densidade de probabilidade possui assimetria positiva. Nesse caso, observa-se que a moda amostral (magnitude do evento de maior frequência) é inferior à mediana, a qual, por sua vez, é inferior à média. O contrário seria observado caso o coeficiente g determinasse um histograma com assimetria negativa. Caso os desvios positivos e negativos se equivalessem, o coeficiente g teria valor nulo (ou próximo de zero) e as 3 medidas de tendência central tenderiam a se concentrar em um único valor de X .

2.3.3.2 Coeficiente de Curtose

De acordo com Meyer (1970), uma medida de quão pontiagudo ou achatado é o histograma (ou o polígono de frequências) em torno da média amostral, pode ser calculada pelo coeficiente de curtose. Esse número adimensional é definido pela Equação 2.8:

$$k = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)(N-3)} \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^4}{\sigma^4} \quad (2.8)$$

2.4 Distribuições de frequências e períodos de retorno

2.4.1 Distribuição de Frequências

Uma variável aleatória é uma função X que associa um valor numérico a cada resultado de um experimento. Embora diferentes resultados do experimento possam compartilhar o mesmo valor associado a X , há um único valor numérico da variável aleatória, associado a cada resultado.

Segundo (MEYER, 1970), se a variável aleatória X pode assumir apenas valores numéricos inteiros e estar associada a um espaço amostral finito e numerável é classificada como discreta. Nesse caso, chama-se de função massa de probabilidades (FMP) a função $p_X(x)$ que indica com que probabilidade a variável X assume o valor do argumento x . Por outro lado, $P_X(x)$ denota a *função acumulada de probabilidades* (FAP), ou função de distribuição de probabilidades, e indica com que probabilidade a variável X é menor ou igual ao argumento x , ou seja:

$$P_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\text{todos } x_i \leq x} P_X(x_i) \quad (2.9)$$

Por outro lado, se a variável aleatória X pode assumir qualquer valor real, ela é do tipo *contínuo* e, nesse caso, a função equivalente à FMP é denominada *função densidade*

de probabilidade (FDP). Essa função não negativa, denotada por $f_X(x)$ e ilustrada na Figura 1(a), representa o caso limite de um polígono de frequências para uma amostra de tamanho infinito e, portanto, com as larguras dos intervalos de classe tendendo a zero. Nota-se que $f_X(x_0)$ não fornece a probabilidade de X para o argumento x_0 e, sim, a intensidade com que a probabilidade de não superação de x_0 é alterada na vizinhança do argumento indicado. A área entre dois limites a e b , no eixo dos argumentos da variável aleatória, dá a probabilidade de X estar compreendida no intervalo, tal como ilustrado na Figura 1(b). Portanto, para a FDP $f_X(x)$, é válida a Equação 2.10:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (2.10)$$

Se fizer o limite inferior dessa integração se aproximar de b , a ponto de ambos se confundirem, o resultado seria equivalente à “área de uma reta” no plano real que, por definição, é nula. Generalizando, pode-se concluir que para uma variável aleatória contínua X , $P(X = x) = 0$.

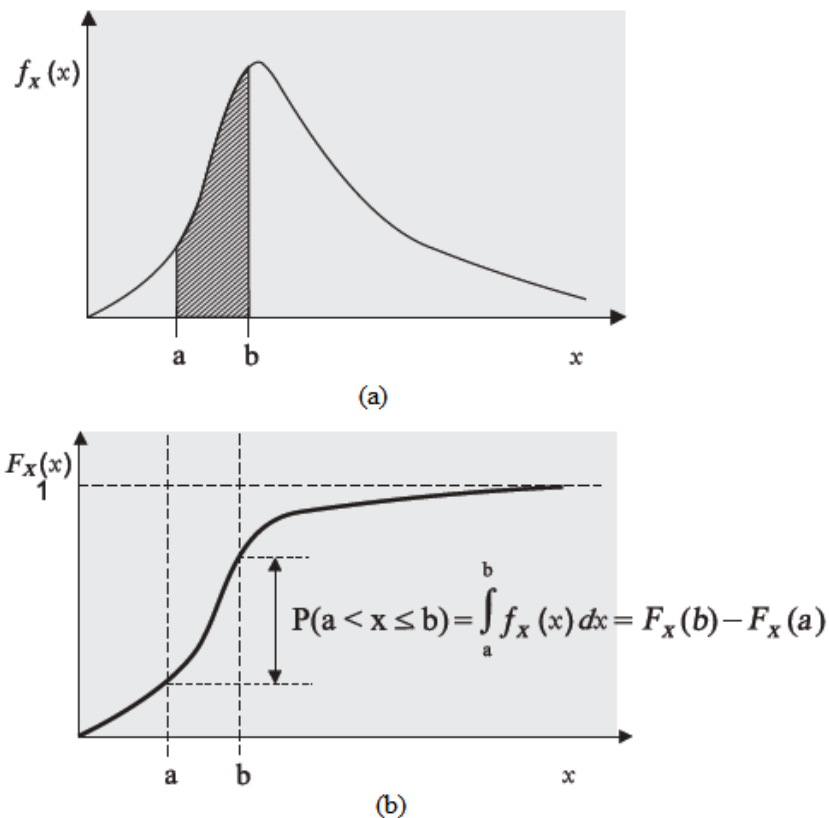


Figura 1 – Funções densidade e acumulada de probabilidades de uma variável contínua (Extraído de [Pinto e Naghetthini \(2007\)](#)).

Analogamente ao caso discreto, a função acumulada de probabilidades (FAP) de uma variável aleatória contínua X , por $F_X(x)$, fornece a probabilidade de não superação

do argumento x , ou seja, $P(X \leq x)$ ou $P(X < x)$. Sendo assim,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx \quad (2.11)$$

Inversamente, a FDP correspondente pode ser obtida pela diferenciação de $F_X(x)$, ou seja,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.12)$$

A FAP de uma variável aleatória contínua é uma função não decrescente, sendo válidas as expressões $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(+\infty) = 1$.

2.4.2 Período de Retorno

Como forma de determinação do período de retorno para o cálculo da vazão de enchente, no Brasil geralmente utiliza-se um critério baseado na experiência do projetista, seja ele baseado na fixação do risco, ou um critério econômico, entre outros. Para fixar as ideias, a variável aleatória X será a vazão máxima anual. De acordo com Gallo (2007), o período de retorno ou intervalo de recorrência de uma enchente é o tempo médio, em anos, em que a enchente é igualada ou superada pelo menos uma vez.

Para obter uma expressão para o período de retorno, considere que a vazão de pico ou de projeto tenha magnitude x_p , com intervalo de recorrência Tr . Então a probabilidade de que esta vazão seja igualada ou superada em um ano qualquer é expressa por:

$$P\{X \geq x_p\} = \frac{1}{Tr} \quad (2.13)$$

Assim, em outras palavras, se determinada obra (vertedouro de barragem, galeria de águas pluviais, bueiro, canal de sistema de drenagem, etc.) for construída para a vazão de cheia de projeto x_p , correspondente a um intervalo de recorrência de Tr anos, então, para cada ano de funcionamento do sistema, a probabilidade de ocorrer falha (vazão de projeto ser superada) é igual a $1/Tr$.

A probabilidade de não ocorrência da falha num ano qualquer será, então,

$$P\{X \leq x_p\} = 1 - \frac{1}{Tr} \quad (2.14)$$

2.5 Metodos Probabilísticos

Uma vez que o comportamento exato das vazões em anos futuros não pode ser absolutamente previsto, procura-se introduzir leis de probabilidade de modo a estabelecer as prováveis variações para permitir que o plano seja completado com base em um risco calculado. Recorre-se, pois, à análise estatística com o propósito de utilizar os eventos

de descargas observadas (série histórica de vazões) num dado período, como meio de se efetuar a projeção para um período de tempo maior.

Na previsão de enchentes, ou seja, na determinação da magnitude das vazões de pico das cheias (que são as vazões críticas ou de projeto), recorre-se ao uso de modelos de probabilidade, a partir de um enfoque estatístico que consiste em definir a relação entre as descargas máximas e as correspondentes frequências de ocorrência, apoiando-se no estudo de uma série de dados observados. A suposição básica é que as cheias verificadas durante um determinado período possam ocorrer em um período futuro de características hidrológicas similares, isto é, com uma expectativa de repetição.

Recomenda-se a aplicação de métodos probabilísticos, na presença de dados fluviométricos adequados, de série histórica considerável, pois, neste caso, o hidrólogo não incorre ao erro da transformação de chuva em vazão.

Segundo [Pinto e Naghetthini \(2007\)](#), as funções matemáticas de distribuição de probabilidade mais utilizadas na análise de frequência das vazões de enchente são:

1. distribuição Gama tipo III, também conhecida como distribuição Pearson tipo III;
2. transformação logarítmica da distribuição gama, também conhecida como distribuição log-Pearson tipo III;
3. Distribuição de Extremos Generalizada (“*Generalized Extreme Value*” - GEV)
4. distribuições exponenciais, também conhecidas como distribuições de valores extremos ou distribuições de Fisher-Tippett, que são de três tipos: tipo I, duplo exponencial, conhecida como distribuição Gumbel; tipo II, conhecida como distribuição de Fréchet; e tipo III, conhecida como distribuição de Goodrich ou Weibull;
5. distribuição gaussiana (distribuição normal de probabilidade);
6. transformação logarítmica da distribuição normal, também conhecida como distribuição lognormal ou distribuição de Galton.

De acordo com [Chow, Maidment e Larry \(1988\)](#), Chow mostrou que a maioria das distribuições de probabilidade usadas em hidrologia pode ser posta na forma:

$$x_{Tr} = \bar{x} + K.s \quad (2.15)$$

em que:

x_{Tr} é a magnitude da variável (vazão ou chuva) atingida ou superada pelo menos uma vez em Tr anos;

\bar{x} é o valor médio da variável considerada;

s é o desvio-padrão;

K é o fator de frequência.

O fator de frequência da equação de Chow depende do tipo de distribuição, da frequência (ou período de retorno) e do coeficiente de assimetria.

Estudos de [Bobee \(1975\)](#), [Bobee e Robitaille \(1977\)](#), [Langbein \(1949\)](#), [Chow, Maidment e Larry \(1988\)](#), [Aksoy \(2000\)](#), [Jenkinson \(1969\)](#), [Haan \(1977\)](#), [Beard et al. \(1974\)](#), [Gumbel \(1958\)](#), [Martins e Stedinger \(2000\)](#) desenvolveram a aplicação de métodos probabilísticos na determinação de períodos de recorrência de enchentes a partir dos registros de vazões máximas locais.

Apresentam-se, a seguir, as distribuições de probabilidade que serão utilizadas neste trabalho.

2.5.1 Distribuição Log-Normal Tipo II

A série anual dos eventos extremos constituídos pelas máximas vazões médias diárias de cada ano, por não serem vazões completamente aleatórias não seguem uma distribuição de Gauss. Entretanto, se ao invés das vazões forem considerados os logaritmos dos seus valores, esses últimos aproximam-se relativamente bem da distribuição normal.

Assim, denotando por x a variável hidrológica (no caso, x representando a vazão), e fazendo-se

$$y = \log x \quad (2.16)$$

ter-se-á:

$$f(y) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

em que μ_y = média dos logaritmos de x ; σ_y = desvio-padrão dos logaritmos de x .

Isto é,

$$\mu_y = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (\log x_i)}{N} \quad (2.18)$$

e

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \mu_y)^2}{N - 1}} \quad (2.19)$$

Para a variável y (transformada logarítmica de x), a função distribuição acumulada de probabilidade, $F(y)$, se escreve como

$$F(y) = P\{Y < y\} = \int_{-\infty}^y f(y)dy \quad (2.20)$$

A partir da equação 2.17, temos que z é a variável reduzida dada por:

$$z = \frac{(y - \mu_y)}{\sigma_y} \quad (2.21)$$

Pela distribuição log-normal, a previsão da enchente de período de retorno Tr , com base no modelo de Chow, exige que a equação 2.15 seja reescrita na forma

$$y_{Tr} = \mu_y + K \cdot \sigma_y \quad (2.22)$$

sendo K o fator de frequência de Chow determinado por

$$K = \frac{e^{\sqrt{\ln(d_x^2+1)}T} - \frac{\ln(d_x^2+1)}{2} - 1}{d_x} \quad (2.23)$$

Onde T é o período de retorno em anos, e d_x é obtido da relação 2.24

$$d_x = \frac{\sigma}{\mu} \quad (2.24)$$

Em que σ é o desvio padrão dos eventos da amostra e μ é a média dos eventos da amostra.

Uma vez que $y = \log x$, a variável procurada, x_{Tr} , se obtém da transformação

$$x_{Tr} = 10^{y_{Tr}}. \quad (2.25)$$

2.5.2 Distribuição Log-Normal Tipo III

A distribuição Log-Normal de 3 parâmetros é similar à distribuição Log-Normal Tipo II, à exceção do fato de que da variável x deduz-se a quantidade γ que representa um limite inferior. Nesse caso, a variável $y = \ln(x - \gamma)$ é distribuída de acordo com uma Normal com média μ_y e desvio padrão σ_y . A função densidade correspondente é dada pela Equação 2.26

$$f(y) = \frac{1}{(x - \gamma)\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] \quad (2.26)$$

Para a série gerada a partir dos logaritmos dos eventos da série de dados, o fator de frequência é calculado pela equação

$$K = \frac{e^{\sqrt{\ln(d_x^2+1)}T} - \frac{\ln(d_x^2+1)}{2} - 1}{W} \quad (2.27)$$

Onde T é o período de retorno em anos, e d_x é obtido pela equação 2.24 e W é obtido da equação 2.28:

$$W = \frac{1 - \omega^{\frac{3}{2}}}{\omega^{\frac{1}{3}}} \quad (2.28)$$

Sendo ω obtido da equação 2.29:

$$\omega = \frac{-g + \sqrt{g^2 + 4}}{2} \quad (2.29)$$

Em que g corresponde ao coeficiente de assimetria que é dado pela equação 2.7.

2.5.3 Distribuição Gama tipo III ou Pearson tipo III

O estatístico inglês Karl Pearson (PORTER, 2010) propôs um sistema de distribuições de probabilidades, na qual podem definir oito grandes famílias de distribuições que incluem a Normal, a Gama e a Beta. Essas famílias são comumente referidas na literatura estatística como Pearson Tipo I, Tipo II, e, assim por diante, até a Pearson Tipo VIII. De todo esse sistema de funções, as distribuições pertencentes à família Gama, ou distribuições Pearson Tipo III, estão entre aquelas que encontraram o maior número de aplicações na análise de frequência de variáveis hidrológicas, com destaque para vazões e precipitações máximas anuais. Em decorrência desse fato, neste trabalho também serão utilizadas as distribuições Pearson Tipo III e Log-Pearson Tipo III.

A função distribuição de probabilidade de Pearson tipo III constitui um caso especial da função gama. A forma matemática da função densidade de probabilidade desta distribuição é dado pela Equação 2.30.

$$f(x) = \frac{1}{\alpha \cdot \Gamma(\beta)} \left(\frac{x - \gamma}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\alpha} \right) \right] \quad (2.30)$$

sendo x a variável aleatória, α o parâmetro de escala, β o parâmetro de forma, γ o parâmetro de posição e

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{\beta-1} dx \quad (2.31)$$

A média, a variância e o coeficiente de assimetria de uma variável aleatória Pearson Tipo III são, respectivamente dado pelas Equações 2.32 2.33 2.34.

$$E[X] = \alpha\beta + \gamma \quad (2.32)$$

$$Var[X] = \alpha^2\beta \quad (2.33)$$

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \quad (2.34)$$

O uso da distribuição Person tipo III para a previsão de cheias também pode ser feito empregando-se a relação de Chow, definida pela Equação 2.15.

O fator de frequência da distribuição Pearson Tipo III é função do período de retorno e do coeficiente de assimetria, caculado por:

$$K = D + (D^2 - 1) \frac{g}{6} + \frac{1}{3} (D^3 - 6D) \left(\frac{g}{6}\right)^2 - (D^2 - 1) \left(\frac{g}{6}\right)^3 + D \left(\frac{g}{6}\right)^4 + \frac{1}{3} \left(\frac{g}{6}\right)^5 \quad (2.35)$$

Sendo g o coeficiente de assimetria dado pela Equação 2.7 e D o desvio padrão padronizado dado pela Equação 2.36.

$$D = T - \frac{2,30753 + 0,27061T}{1 + 0,99229T + 0.04481T^2} \quad (2.36)$$

Onde T é o período de retorno em anos. Com isso, basta obter x_{Tr} usando a equação 2.15.

2.5.4 Distribuição Log-Pearson tipo III

A função de distribuição de probabilidade Log-Pearson Tipo III é assim denominada porque a função de distribuição da equação 2.30 é aplicada à transformada logarítmica da variável x , ou seja,

$$f(x) = \frac{1}{\alpha \cdot x \Gamma(\beta)} \left(\frac{y - \gamma}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{y - \gamma}{\alpha} \right) \right] \quad (2.37)$$

onde $y = \log(x)$ e as demais grandezas conforme definidas na secção Pearson tipo III.

A função densidade da distribuição Log-Pearson Tipo III possui uma grande variedade de formas. Para a análise de frequência de eventos hidrológicos máximos, somente as distribuições Log-Pearson Tipo III, com valores de β maiores do que 1 e valores de $\frac{1}{\alpha}$ maiores do que zero, são de interesse. Isso decorre do fato que valores negativos do

coeficiente de assimetria implicam em $\alpha < 0$ e, por conseguinte, em um limite superior para a variável aleatória.

Os procedimentos dos caculos aqui são análogos ao da distribuição Pearson tipo III. De forma resumida, deve-se proceder de acordo com a seguinte marcha de procedimentos de cálculo:

1. construir a série para a variável transformada, calculando a transformada logarítmica, $y_i = \log x_i$;
2. calcular a média μ_y , o desvio-padrão σ_y e o coeficiente de assimetria g_y para a série transformada, sendo que g_y é dado pela Equação 2.38

$$g_y = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \frac{\sum_{i=1}^N (\log x_i - \mu_y)^3}{\sigma_y^3}; \quad (2.38)$$

3. obter, por meio da Equação 2.35 o fator de frequência em função do coeficiente de assimetria g_y e do período de retorno Tr ;
4. calcular y_{Tr} por meio da Equação 2.15 e obter x_{Tr} por meio da Equação 2.25

2.5.5 Distribuição Tipo I de Fisher-Tippett ou Gumbel

Em 1928, Fisher e Tippett, tomando de vários conjuntos de muitas amostras o maior valor de cada conjunto, mostraram que a distribuição dos valores extremos é independente da distribuição original e se comporta como função limite. Gumbel, em 1945, sugeriu que essa distribuição de valores extremos seria apropriada para a análise de frequência das cheias, desde que a série fosse anual, isto é, cada vazão da série de valores extremos fosse a maior vazão de uma amostra de 365 possibilidades (maior vazão do ano).

A Distribuição de Gumbel também conhecida como distribuição de valores extremos do tipo I, ou distribuição do tipo I de Fisher-Tippet, segundo Gumbel (1958), tem a função de probabilidades acumuladas dada pela Equação 2.39:

$$F_X(x) = P\{X < x\} = e^{-e^{-y}} \quad (2.39)$$

Sendo x a vazão e y a variável reduzida de Gumbel dada por:

$$y = \frac{x - \beta}{\alpha} \quad (2.40)$$

Em que α e β parâmetros característicos da reta de Gumbel; α representa o parâmetro de escala e β o parâmetro de posição.

A função densidade da distribuição de Gumbel é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\alpha} \exp \left[-\frac{x - \beta}{\alpha} - \exp \left(\frac{x - \beta}{\alpha} \right) \right] \quad (2.41)$$

Explicitando-se a variável reduzida de Gumbel da equação 2.39, obtém-se:

$$y(F(x)) = -\ln [-\ln (F(x))] \quad (2.42)$$

Sabe-se também que, para as vazões máximas, a probabilidade de não excedência dada por $F(x) = P\{X \leq x\}$ relaciona-se com o período de retorno segundo a equação 2.14. Da combinação das expressões 2.42 e 2.14, a variável reduzida toma a seguinte forma:

$$y(Tr) = -\ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{Tr} \right) \right] \quad (2.43)$$

Portanto, das equações 2.40 e 2.43, tem-se que:

$$x(Tr) = \beta - \alpha \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{Tr} \right) \right] \quad (2.44)$$

na qual, Tr denota o período de retorno em anos.

O valor esperado, a variância e o coeficiente de assimetria de X são dados por: Equação 2.45, Equação 2.46 e Equação 2.47 respectivamente.

$$E[X] = \beta + 0,5772\alpha \quad (2.45)$$

$$Var[X] = \sigma_X^2 = \frac{\pi^2 \alpha^2}{6} \quad (2.46)$$

$$\gamma = 1,1396 \quad (2.47)$$

Observa-se, portanto, que a distribuição Gumbel (máximos) possui um coeficiente de assimetria positivo e constante.

2.6 Estimação dos parâmetros por meio da máxima verossimilhança

2.6.1 Definições

O Método da Máxima Verossimilhança consiste de uma metodologia desenvolvida por Fisher em 1922, no qual se busca a maximização da probabilidade (plausibilidade)

de um parâmetro representar uma população, maximizando a densidade conjunta dos elementos amostrais. De acordo com Meyer (1970), a função de verossimilhança é matematicamente definida pelo produtório das densidades de cada valor amostral, sendo este dado por $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, ou seja:

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \dots f(x_N; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (2.48)$$

em que θ são os parâmetros da distribuição.

Assim, a máxima verossimilhança consiste em encontrar o ponto de máximo da função da equação 2.48, derivando-a em relação a cada um dos seus parâmetros, e igualando-se a zero.

Para distribuições contínuas com mais de um parâmetro, tem-se uma superfície e duas outras equações, constituindo um sistema para obtenção dos parâmetros correspondentes ao ponto de máximo. Como a função logaritmo é monótona e crescente, o máximo da função $L(\theta)$ e da função $\log(L(\theta))$ ocorrem na mesma posição. Portanto, para facilitar a solução matemática do ponto de máximo, é necessário linearizar a Equação 2.48, obtendo-se a função logaritmo de verossimilhança $\log(L(\theta))$ (Equação 2.49) e estimar os parâmetros θ que maximizem esta função.

$$\log(L(\theta)) = \log f(x_1; \theta) + \log f(x_2; \theta) + \dots + \log f(x_N; \theta) = \sum_{i=1}^N \log f(x_i; \theta) \quad (2.49)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores $\hat{\theta}$ que maximizam $\log(L(\theta))$. Eles são encontrados resolvendo o sistema de equações (Equação 2.50).

$$U(\hat{\theta}) = \frac{\partial \log(L(\hat{\theta}))}{\partial \hat{\theta}} \quad (2.50)$$

Segundo Pinto e Naghetthini (2007), o método dos momentos é o método de estimação mais simples, sendo que para amostras pequenas pode apresentar a mesma eficácia dos demais. Entretanto, quando comparado ao método de Máxima Verossimilhança, sua qualidade é inferior e menos eficiente.

O método da Máxima Verossimilhança (MVS) produz parâmetros com menor variância. No entanto, para alguns casos, a maior eficiência do método MVS é apenas assintótica (relacionado a extremos), o que faz com que sua aplicação a amostras reduzidas produzam valores de qualidade análoga ou abaixo a outros métodos. Neste trabalho apenas será utilizado o método de máxima verossimilhança.

2.7 Diagrama Quantis-Quantis (Q-Q)

Segundo Meyer (1970), o diagrama quantis-quantis, ou diagrama Q-Q, é uma representação gráfica que permite visualizar a associação entre duas variáveis X e Y . Ele nada mais é do que uma representação dos dados ordenados (ou quantis) do conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ contra os dados ordenados (ou quantis) da amostra de mesmo tamanho $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$. Para elaborar um diagrama Q-Q, é necessário:

- classificar os dados de X (e Y) em ordem crescente;
- associar aos dados classificados os seus respectivos números de ordem da classificação m , com $1 \leq m \leq N$;
- associar aos dados classificados as correspondentes frequências ou probabilidades empíricas de não superação.

Em seguida os dados de X e Y , com igual frequência ou probabilidade empírica de não superação, são lançados em coordenadas cartesianas, formando assim, o diagrama Q-Q.

O gráfico Q-Q demonstra se os valores mais baixos, médios e mais altos de X estão relacionados aos seus correspondentes de Y . Em um caso limite, se as distribuições dos dois conjuntos de dados fossem idênticas, a menos de suas medidas de posição e escala (ou dispersão), os pontos estariam sobre a reta $y = x$. O modo como os pontos se afastam dessa linearidade revelam as diferenças entre as distribuições de X e Y .

2.8 Intervalos de Confiança

Uma estimativa pontual de uma variável aleatória a partir de uma distribuição de probabilidades, é um número que se encontra na vizinhança do verdadeiro e desconhecido valor populacional da variável. A questão do erro presente na estimação pontual da variável aleatória, devido à variabilidade inerente às amostras aleatórias que lhe deram origem, nos remete à construção dos chamados intervalos de confiança.

Uma vez estimados os parâmetros de uma distribuição de probabilidades $F_X(x)$, o interesse é estimar X_{Tr} correspondente ao período de retorno Tr . O quantil X_{Tr} pode ser estimado pela função inversa de F , denotada por $\phi(Tr)$, ou em outros termos, $x_{Tr} = \hat{X}_{Tr} = \phi(Tr)$. De acordo com Meyer (1970), a medida usada para quantificar a variabilidade presente em \hat{X}_{Tr} , e, portanto, indicar a confiabilidade das estimativas de quantis das séries de vazões máximas anuais, é dada pelo erro padrão da estimativa, denotado por S_{Tr} e definido por:

$$S_{Tr} = \sqrt{E \left[\left\{ X_{Tr} - \hat{E} [X_{Tr}] \right\}^2 \right]} \quad (2.51)$$

Portanto, como decorrência desse resultado, pode-se construir intervalos de confiança aproximados, a um nível $100(1 - \alpha)\%$, cujos limites são expressos por:

$$\hat{X}_{Tr} - 1,96S_{Tr} < \beta < \hat{X}_{Tr} + 1,96S_{Tr} \quad (2.52)$$

Sendo X_{Tr} a magnitude do evento; S_{Tr} o erro padrão pertinente a cada função de probabilidade; e β o intervalo de confiança ao nível de 95%.

Essa expressão é interpretada do seguinte modo: se construíssemos uma grande quantidade de intervalos $[\hat{X}_{Tr} - 1,96S_{Tr}, \hat{X}_{Tr} + 1,96S_{Tr}]$, a partir de amostras de tamanho N , 95% desses intervalos conteriam o parâmetro β e 5% deles não o conteriam.

3 Metodologia

Afim de analisar o método de Gumbel quanto a sua validade para estimar vazões referente a altos períodos de retorno (projetos de PCH, ou seja, $Tr = 500$ e $Tr = 1000$), foi feita uma análise teórica do método de Gumbel em relação as séries de vazões máximas e um teste comparativo entre este método e outros quatro que também são muito utilizados na análise de frequência das vazões de enchente.

O teste foi feito admitindo-se inicialmente uma análise de frequência de vazões locais. A definição dos quantis de interesse, valores das vazões associados a certas probabilidades de excedência, é realizada utilizando uma única série de registros hidrométricos ou hidrometeorológicos, observados em certa estação fluviométrica. Além disso, é admitido também para esta análise a existência de funções paramétricas que descrevam o comportamento probabilístico das vazões locais. Porém, não se conhece a priori a distribuição das vazões, sendo necessário especificar um certo modelo distributivo, o qual deve ser capaz de descrever o comportamento probabilístico das vazões máximas e de predizer-las com confiabilidade razoável. Em resumo, as etapas da metodologia do teste segue os passos descritos no fluxograma apresentado na Figura 2.

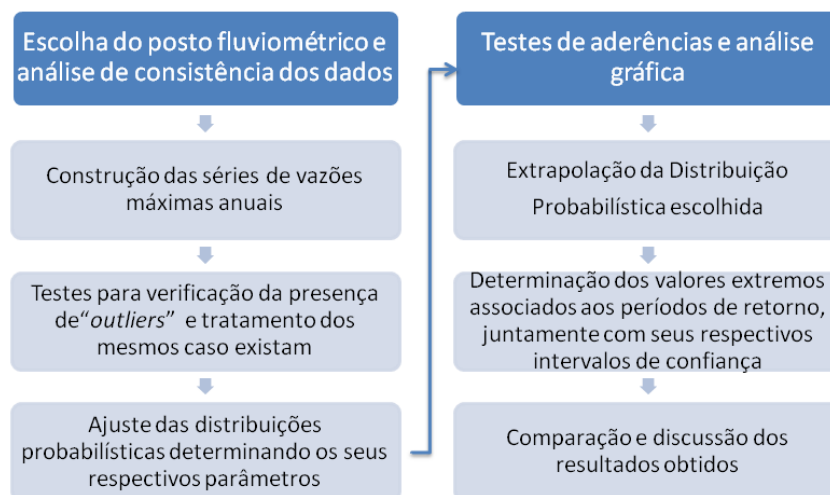


Figura 2 – Fluxograma da metodologia implementada.

Nas seções seguintes serão descritas com mais detalhes cada uma das etapas deste teste.

3.1 Material e Consistência dos dados

3.1.1 Coleta de dados

O Estado de São Paulo é dividido hoje em 20 (vinte) Comitês de Bacias Hidrográficas, seguindo uma clara tendência a respeito da forma de organização de regiões do ponto de vista hidrológico, onde há a adoção da bacia hidrográfica como elo de ligação entre municípios, assumida como unidade de gestão dos recursos hídricos. Desde 1951 o DAEE, através do Centro Tecnológico de Hidráulica e Recursos Hídricos – CTH, opera a Rede Hidrológica Básica do Estado de São Paulo – RBSP, sendo ela constituída por estações fluviométricas e pluviométricas abrangendo o território estadual.

Afim de aplicar o teste, foram utilizados dados de vazões diárias de cinco postos fluviométricos do estado de São Paulo. Os dados das vazões diárias foram coletados do DAEE (2013). Os dados foram escolhidos de forma que as vazões medidas fossem de diferentes locais e com registros de 20 anos ou mais. Dos dados disponíveis de cada local foram escolhidos somente aqueles com anos completos, descartando os demais. Para os anos completos foram extraídos os valores de vazão máxima anual, formando assim as séries históricas de cada local. Na Tabela 2 são apresentados os dados utilizados e suas principais características.

Tabela 2 – Descrição dos postos fluviométricos considerados.

Município	Prefixo DAEE	Posto	Latitude	Longitude	Área (km ²)	Curso d'Água
Conchas	5E-012	São João	23°04'08"	48°09'15"	584,00	Peixe,r
Capão Bonito	5E-003	Ferreira das Almas	23°56'34"	48°12'47"	681,00	Paranapanema,r
Cosmópolis	4D-001	Usina Ester	22°39'26"	47°12'53"	3394,00	Jaguari,r
Itapetininga	5E-009	Turvo	23°51'0"	48°12'40"	773,00	Turvo,r
Tatui	4E-004	Americana Velha	23°19'12"	47°46'42"	3942,00	Sorocaba,r

Fonte:(DAEE, 2013)

Tabela 3 – Intervalo e tamanho das séries históricas de vazões máximas anuais de cada posto fluviométrico.

Posto	Curso d'Água	Prefixo DAEE	início	fim	Anos com dados completos
São João	Peixe,r	5E-012	1970	2005	32
Ferreira das Almas	Paranapanema,r	5E-003	1968	1997	28
Usina Ester	Jaguari,r	4D-001	1944	2004	59
Turvo	Turvo,r	5E-009	2968	2002	31
Americana Velha	Sorocaba,r	4E-004	1960	2003	43

Fonte:(DAEE, 2013)

A Tabela 4 mostra, para cada um dos locais escolhidos, as principais características das séries de vazões máximas anuais.

Observando os valores por unidade de área da Tabela 4 nota-se que apesar dos postos 5E-012 e 5E-003 terem os parâmetros um pouco mais elevado que os demais, estes são relativamente próximos.

Tabela 4 – Características das séries de vazões máximas anuais por unidade de área.

Prefixo	Máximo		Mínimo		Média		Desvio Padrão		Coeficiente de Variação
	(m ³ /s)	(m ³ /s.km)	(m ³ /s)	(m ³ /s.km)	(m ³ /s)	(m ³ /s.km)	(m ³ /s)	(m ³ /s.km)	
5E-012	148,62	0,26	31,72	0,05	78,73	0,14	29,81	0,05	0,42
5E-003	230,06	0,34	67,48	0,10	133,89	0,20	41,69	0,06	0,30
4D-001	624,42	0,18	69,86	0,02	242,91	0,07	124,19	0,04	1,38
5E-009	120,25	0,16	17,00	0,02	54,66	0,07	27,19	0,04	0,70
4E-004	463,76	0,12	74,92	0,02	221,47	0,06	98,17	0,03	0,78

As séries, aqui constituídas para a análise de frequência, devem ser representativas da vazão em questão, não apresentando erros de observação ocasionais e/ou sistemáticos, além de possuir um número suficiente de elementos que permita realizar extrapolações confiáveis. Além disso, na análise de frequência, é necessário que os dados sejam homogêneos e independentes.

O DAEE garante que durante as medições das vazões é tomado todo o cuidado possível, minimizando assim ao máximo erros do tipo sistemáticos. Conforme citado anteriormente, todas as séries de vazões possuem 20 anos de registros de dados completos ou mais, sendo esta quantidade, um número razoável para as análises (Guimarães (2011)). Para estas estimativas, afim de analisar o método, todas as amostras aqui foram consideradas homogêneas e independentes.

3.1.2 Identificação e tratamento dos pontos atípicos ou *outliers*

Nesta etapa, são feito os tratamentos dos pontos atípicos das amostras, caso existam. A técnica utilizada para identificar estes pontos (*outliers*), é uma técnica de uso corrente em hidrologia e que também é recomendada pelo *United States Water Resources Concil* (USWRC, 1976). Ela é uma estatística modificada de Grubbs e Beck (1972).

Para encontrar o menor valor considerado como “não-*outlier*” aplica-se a Equação 3.1:

$$x_i = \bar{x} - T_{n,\alpha} \cdot s \quad (3.1)$$

Em que x_i representa as vazões das séries, \bar{x} a média, s o desvio padrão e $T_{n,\alpha}$ representa o valor crítico de teste que depende do tamanho da amostra e de um limiar α . O valor crítico de $T_{n,\alpha}$ é inferido com base em valores tabelados adaptada do trabalho original de Grubbs e Beck (1972) (Anexo A).

Sendo assim, valores abaixo de x_i são candidatos à *outliers*. Se o valor do teste der um número negativo, estes serão substituídos por valores nulos, uma vez que não existem valores negativos de vazões, ou seja, não existirão candidatos à *outliers* mínimos para a respectiva amostra.

Para verificar se o último valor da série pode ser considerado candidato à *outlier*,

aplica-se a Equação 3.2:

$$T = \frac{s_1^2}{s^2} \quad (3.2)$$

Em que s_1^2 é a variância da amostra (série histórica) sem o maior valor; s^2 é a variância da amostra completa.

Se o valor de T da Equação 3.2 for maior que o valor de $T_{n,\alpha}$ crítico, o valor não pode ser considerado *outlier*, uma vez que o valor de T calculado não será significativo.

O nível de significância utilizado para todas as amostras foi de $\alpha=5\%$. As hipóteses testadas para cada teste foram:

- H_0 : Não há candidatos a *outliers*;
- H_1 : Há candidatos a *outliers*.

Caso haja a existência de algum candidato à *outlier* na amostra, estes serão analisados com o auxílio de hidrogamas e de registros históricos dos seus respectivos anos de ocorrência para verificar se, de fato, o candidato é um ponto atípico. A discussão quanto a este ponto será feita com mais detalhe no Capítulo 4 - Resultados e Discussão.

3.2 Ajuste das distribuições aos dados de vazão máxima anual dos postos fluviométricos e Testes de Aderência para análise das distribuições

Para as séries de vazões máximas anuais de cada local foram estimados os parâmetros das distribuições Log-Normal Tipo II, Log-Normal Tipo III, Pearson Tipo III, Log-Pearson Tipo III e Gumbel através da maximização das funções de Máxima Verossimilhança (MSV). A maximização da função de máxima verossimilhança foi feita com o auxílio do *software Matlab*. Como as rotinas de cálculo utilizam busca direta e, devido a função de máxima verossimilhança não apresentar máximos locais, pode-se afirmar que os dados obtidos pelo *Matlab* se mostram adequados. Os valores iniciais para a procura foram os parâmetros estimados através do método dos momentos.

Feito os ajustes, foram aplicados dois testes de aderência à todas as distribuições. Os dois métodos aqui aplicados foram: teste de aderência Kolmogorov-Smirnov(K-S) e Qui-Quadrado (χ^2).

Segundo [Silvino et al. \(2008\)](#), estes testes foram escolhidos por serem os mais comumente utilizados e mais apropriados para variáveis aleatórias contínuas, como as vazões.

O resultado de cada teste é obtido pelas seguintes metodologias:

3.2.1 Teste Qui-Quadrado

As partições do espaço amostral são feitas por meio da divisão em classes (r), com o cálculo das frequências observadas e esperadas, dentro dos limites dos intervalos de classe. O número de classes r é o número inteiro mais próximo do valor \sqrt{N} , em que N é o tamanho da amostra. A faixa dos intervalos de cada classe, para este cálculo não precisa ser fixa desde que o número de frequências observadas O_i variem em torno de valores aceitáveis.

Após esta etapa, encontra-se a frequência relativa esperada na classe i , dada por: $p_i = \phi(LS, \text{parametros}) - \phi(LI, \text{parametros})$, onde LS e LI representam, respectivamente, os limites superior e inferior de cada classe, e $\phi(\cdot)$ denota a FAP da distribuição com seus respectivos parâmetros. A frequência absoluta E_i , da classe i , é dada pelo produto de p_i pelo tamanho da amostra N . Em seguida, calcula-se o valor da estatística de teste χ^2 dado pela equação 3.3:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(O_i - E_i)^2}{O_i} \quad (3.3)$$

Em seguida, através de valores da distribuição Qui-Quadrada (Anexo C), obtém-se o valor crítico de χ^2 , $\chi_{\alpha, \nu}^2$, em que α é o nível de significância e ν são os graus de liberdade dado por $\nu = (r - k - 1)$, sendo k o número de parâmetros da distribuição.

Se $\chi^2 < \chi_{\alpha, \nu}^2$ não há diferença estatística entre os dados observados e calculados a nível de significância α .

3.2.2 Teste Kolmogorov-Smirnov

Para implementar o teste KS, inicialmente, são classificados os elementos da amostra X_1, X_2, \dots, X_N em ordem crescente, de modo a constituir a sequência $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}, \dots, x_{(N)}$, na qual $1 \leq m \leq N$ denota a ordem de classificação. Para cada elemento $x_{(m)}$, a distribuição empírica $F_N(x_m)$ é calculada pela proporção de valores amostrais que não excedem $x_{(m)}$, ou seja,

$$F_N(x_m) = \frac{m}{N} \quad (3.4)$$

Em seguida, calcula-se as probabilidades teóricas, segundo $F_X(x)$, tendo como argumento os valores x_m . A estatística do teste K-S é dada pela equação 3.5:

$$D_N = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_N(x) - F_X(x)| \quad (3.5)$$

e corresponde, portanto, à maior diferença entre as probabilidades empíricas e teóricas.

Em seguida, através de tabelas (Anexo B), obtém-se o valor crítico de D_N , $D_{N, \alpha}$, em que α é o nível de significância e N é o tamanho da amostra. Se $D_N < D_{N, \alpha}$ não há diferença estatística entre os dados observados e calculados.

3.3 Estimativa das vazões máximas de projeto com tempos de retorno típicos de obras hidráulicas (PCH)

Após o pré-processamento dos dados e ajustes das distribuições, as vazões máximas foram estimadas pelos métodos probabilísticos de Pearson III, Log Normal II, Log Normal III, Gumbel e Log Pearson III, para os períodos de retorno 10, 20, 50, 100, 200, 500 e 1000 anos. De posse destes valores foram montadas tabelas correlacionando os tempos de retorno (Tr) com as respectivas vazões de projeto (x_p) estimadas por cada distribuição, para comparar os resultados obtidos pelo método de Gumbel com as demais distribuições. As vazões de projeto de principal interesse estão correlacionadas aos tempos de retorno:

- $Tr = 500$ anos, para vertedor de obras galgáveis permanentes como barragem de concreto;
- $Tr = 1000$ anos, para vertedor de obras galgáveis não permanentes como barragem de terra.

3.4 Intervalo de Confiança

O nível de confiança utilizado para todos os métodos probabilísticos é de 95%. As estimativas dos limites do intervalo de confiança são dadas pela Equação 3.6:

$$M - 1,96S_{Tr} < \beta < M + 1,96S_{Tr} \quad (3.6)$$

Sendo M a magnitude do evento; S_{Tr} o erro padrão pertinente a cada função de probabilidade; e β o intervalo de confiança ao nível de 95%.

4 Resultados e Discussão

No que diz respeito ao estudo teórico prévio das distribuições de probabilidades utilizadas neste trabalho, serão comentados aqui os principais pontos.

4.1 Análise teórica

Gumbel demonstrou que, segundo a teoria assintótica de valores extremos as FAP's (funções acumuladas de probabilidade) que melhor se adequam à distribuição de vazões máximas são do Tipo I (a forma dupla exponencial) e do Tipo II (a forma exponencial simples) (PINTO; NAGHETTHINI, 2007, p. 156). Em virtude da vazão ser uma variável contínua, ilimitada superiormente e por possuir, para vazões extremamente grandes, uma probabilidade de ocorrência muito pequena, a sua distribuição de frequência terá a cauda superior exponencial ou polinomial. Em outras palavras, a distribuição de frequência das vazões extremas (na direção dos extremos) tende a convergir para algum dos dois modelos. Pearson, durante o período de 1857 a 1936, também propôs um sistema de distribuições de probabilidades no qual, assim como o modelo de Gumbel, podem representar as distribuições de frequência das vazões de acordo com os ajustes de seus parâmetros. Além destes dois modelos, existem vários outros que também podem ser selecionados para representar a distribuição de frequência das vazões. Dentre elas estão: as distribuições Exponencial e sua forma mais geral que é a Generalizada de Pareto, Pearson III, Log-Pearson III e Log-Normal de 2 parâmetros. (PINTO; NAGHETTHINI, 2007, p. 313).

Segundo Tucci et al. (1998), o chamado “peso” da cauda superior de uma função distribuição de probabilidades determina a intensidade com que os quantis aumentam, à medida que os tempos de retorno tendem para valores muito elevados. Em outras palavras, o peso da cauda superior é proporcional às probabilidades de excedência associadas a quantis elevados e é reflexo da intensidade com que a função densidade $f_N(x)$ decresce quando x tende para valores muito elevados.

Para vazões, a correta prescrição da cauda superior de uma distribuição de probabilidades é de importância fundamental, porém, os tamanhos das amostras disponíveis para essas aplicações são invariavelmente insuficientes para se determinar, com alguma precisão, a forma da cauda superior do modelo probabilístico. Segundo Martins e Steindinger (2000), não havendo razões suficientes para se recomendar o emprego exclusivo de somente um tipo de cauda superior, é aconselhável utilizar um grande conjunto de distribuições candidatas cujos pesos de suas caudas superiores se estendam por um amplo espectro.

Além disso, as características probabilísticas de um fenômeno aleatório não são facilmente definidas, tanto que a dedução teórica do modelo probabilístico necessário para definir tais características não é uma tarefa simples. Sob certas circunstâncias, as bases ou propriedades do fenômeno físico em análise podem sugerir a forma da distribuição a ser utilizada. Além disso, o fato de que as vazões não satisfazem exatamente todas as premissas da teoria clássica de valores extremos, pode vir a justificar o uso de distribuições não-extremais, tais como a Log-Normal, na análise local de frequência de eventos máximos anuais. [Chow, Maidment e Larry \(1988\)](#) apresenta a seguinte justificativa para o emprego da distribuição Log-Normal: os fatores causais de várias variáveis hidrológicas agem de forma multiplicativa, ao invés de aditiva, e a soma dos logaritmos desses fatores, em consequência do teorema central limite da teoria de probabilidades, tende a ser normalmente distribuída.

No contexto da análise de frequência local de vazões extremas, devem ser consideradas mais de um tipo de distribuição candidatas como quaisquer outras e, portanto, devem ser discriminadas de acordo com outros critérios, tais como suas medidas de aderência aos dados amostrais entre outros.

Diante desta análise teórica e devido ao fato de que o objetivo aqui é a análise do método de Gumbel quanto à sua validade para estimar vazões relacionadas à períodos de retorno de 500 e 1000 anos (vazões de projeto de PCH's), é que foi adotado para este estudo, um teste comparativo.

4.2 Amostras

Conforme foi descrito na metodologia (Capítulo 3), dos dados coletados somente foram utilizados aqueles com anos completos, descartando os demais. As estações selecionadas para coleta de dados neste estudo apresentaram poucas falhas, não sendo necessário muitas alterações.

- No posto São Joao, Cód. DAEE 5E-012, início em 1970 e fim em 2005, descartou-se os anos de 1970, 2004 e 2005;
- No posto Ferreira das Almas, Cód. DAEE 5E-003, início em 1968 e fim em 1997, descartou-se o ano de 1968;
- No posto Usina Ester, Cód. DAEE 4D-001, início em 1944 e fim em 2004, descartou-se o ano de 1980;
- No posto Turvo, Cód. DAEE 5E-009, início em 1968 e fim em 2002, descartou-se os anos de 1969, 1981 e 2001;

- No posto Americana Velha, Cód. DAEE 4E-004, início em 1960 e fim em 2003, não descartou nenhum ano.

Na Tabela 5 e Tabela 6 estão os resultados do teste de Grubbs e Beck (1972), para verificar a existência de candidatos à *outliers* na amostra (série de vazões máximas anuais de cada posto).

Tabela 5 – Resultado do Teste de Grubbs & Beck (1972), para valores extremos Inferiores.

Código do Posto	Tamanho da Amostra (N)	Limite inferior do teste (m^3/s)	Limite inferior amostra (m^3/s)	Resultado do teste
5E-012	33	0,00	31,72	H_0
5E-003	29	19,45	67,48	H_0
4D-001	60	0,00	69,86	H_0
5E-009	32	0,00	17,00	H_0
4E-004	44	0,00	74,92	H_0

Tabela 6 – Resultado do Teste de Grubbs & Beck (1972), para valores extremos Superiores

Código do Posto	Tamanho da Amostra (N)	$T_{N,0.05}$	Teste	$T_{N,0.005}$	Crítico	Resultado do teste
5E-012	33	0,9216		0,6008		H_0
5E-003	29	0,9126		0,6008		H_0
4D-001	60	0,9229		0,7550		H_0
5E-009	32	0,9127		0,6008		H_0
4E-004	44	0,9356		0,6985		H_0

A qualidade e a aplicabilidade da análise de frequência dependem diretamente dos dados utilizados para estimação de seus parâmetros. Devido a este motivo, os dados aqui utilizados são considerados independentes, estacionários e representativos de sua população. Os anos que não apresentavam amostras completas foram excluídos para evitar que a amostra fosse tendenciosa e não afetasse assim as estimativas dos parâmetros das distribuições.

Pelos resultados apresentados nas Tabelas 5 e 6, pode-se observar que para todas as séries de vazões máximas anuais, não houve a rejeição de H_0 , ou seja, confirma-se a hipótese de que não há existência de candidatos à *outliers* à nível de significância de 5% (tanto para os limites superiores quanto os inferiores). Sendo assim, os futuros ajustes das distribuições para estas amostras, também estão imunes dos efeitos causados por pontos atípicos na amostra, não comprometendo portanto as estimativas das características da cauda superior.

4.3 Resultados para amostra do posto São João

4.3.1 Ajuste das distribuições

Foram ajustadas, aos dados de vazão máxima anual do posto 5E-012 (São João), as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel mediante a metodologia de máxima verossimilhança. Os valores dos parâmetros são apresentados na Tabela 7.

Para comparar o ajuste dos dados obtidos com os modelos foram utilizados dois testes de aderência: Kolmogorov-Smirnov(KS) e Qui-Quadrado (χ^2). Lembrando que os testes foram efetuados à nível de significância de 5%. Os resultados dos testes são apresentados na Tabela 8. A comparação visual das aderências das distribuições estão apresentadas na Figura 3.

Tabela 7 – Parâmetros estimados para as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 5E-012 (São João)

Log-Normal II		Log-Normal III			Pearson III		
σ	μ	σ	μ	γ	α	β	γ
0,3925	4,2923	0,2768	4,6369	-28,48	4,1032	15,243	16,177
Gumbel		Log-Pearson III			-	-	-
σ	μ	α	β	γ	-	-	-
6,9744	11,28	46,375	-0,05853	7,0067	-	-	-

Tabela 8 – Resultados dos testes de aderência para as distribuições de probabilidades em relação a amostra do posto 5E-012 (São João), com $N=33$ e $alpha = 5\%$

Distribuição	Kolmogorov-Smirnov			Qui-quadrado		
	D_{Teste}	$D_{Crit.}$	Rejeita?	χ^2_{Teste}	$\chi^2_{Crit.}$	Rejeita?
Log-Normal II	0,13686	0,23076	Não	0,81688	7,8147	Não
Log-Normal III	0,12188	0,23076	Não	3,9788	9,4877	Não
Pearson III	0,12873	0,23076	Não	6,1637	9,4877	Não
Log-Pearson III	0,11908	0,23076	Não	3,9875	9,4877	Não
Gumbel	0,13942	0,23076	Não	0,79129	7,8147	Não

Olhando para a Tabela 8, nota-se que nenhum dos ajustes de distribuição foram rejeitados pelos testes, ou seja, de acordo com os dois testes utilizados a distribuição das vazões máximas do posto São João pode ser representada por qualquer uma das distribuições ajustadas. Mais ainda, pode-se dizer que à nível de significância de 5% esta amostra segue qualquer uma das distribuições candidatas pré-selecionadas.

No que diz respeito à análise visual, conforme mostra o gráfico Q-Q Plote da Figura 3, nota-se visivelmente a aderência das funções de distribuição à amostra pelo fato da tendência linear dos pontos. Este gráfico também nos mostra que para valores extremos, a distribuição de Gumbel e Log-Pearson III foram as que melhor se ajustaram a amostra, sendo a distribuição de Gumbel um pouco melhor em relação a este fator.

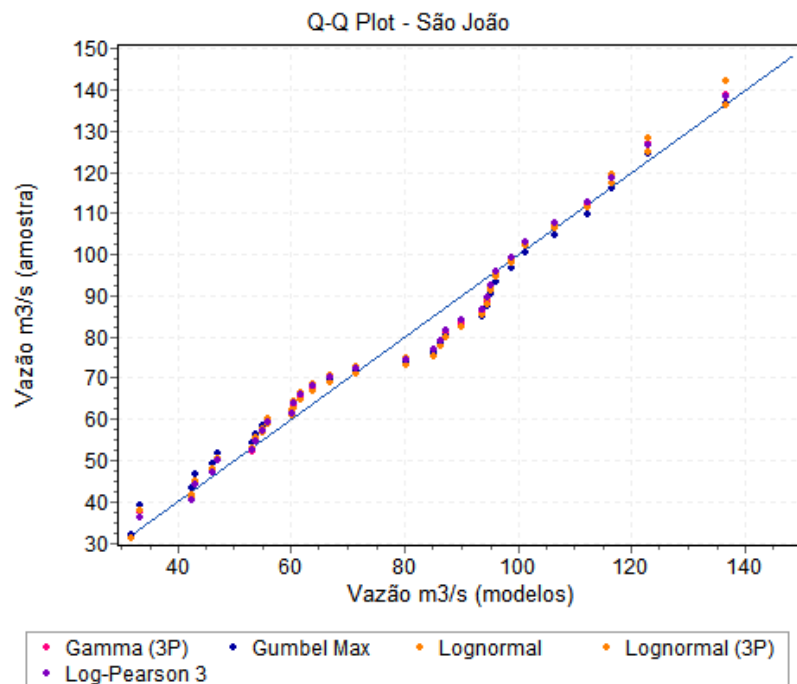


Figura 3 – Gráfico Quantil-Quantil das distribuições ajustadas x distribuição empírica

Em suma, pelos testes de aderência KS e χ^2 , foi visto que para a amostra do posto São João todas as distribuições candidatas são qualificadas a representá-la. Pelo diagrama Quantis-Quantis, opta-se pela distribuição de Gumbel, uma vez que esta é a que mais se aproxima da reta $x = y$ nos valores extremos.

4.3.2 Estimativas das vazões para $Tr = 500$, $Tr = 1000$ anos e Intervalos de Confiança

Na Tabela 9 são apresentadas as estimativas das vazões máximas para valores de período de retorno iguais à: 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 para cada distribuição juntamente com os seus respectivos intervalos de confiança de 95%. Na Figura 4 estão representados os gráficos das vazões máximas estimadas (para cada distribuição) em função do período de retorno em escala logarítmica (base 10).

Em relação as vazões estimadas para $Tr = 500$ e $Tr = 1000$ do posto São João, tem-se que: de acordo com a Tabela 9 e a Figura 4, a distribuição Log-Normal II é a que possui estimativas mais elevadas para estas vazões, sendo a estimativa das outras distribuições mais coerentes entre si. Porém, em relação a largura do intervalo de confiança para estas mesmas vazões, a distribuição Log Normal II foi a que apresentou menor variação, seguida da distribuição de Log Pearson III e Gumbel.

Pela comparação, levando-se em conta tanto a vazão estimada assim como o seus respectivos intervalos de confiança, os resultados nos mostram que as distribuições, tanto

Tabela 9 – Vazões para 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos de período de retorno e intervalos de confiança de 95% estimado com as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 5E-012 (São João).

		Log-Normal II		Log-Normal III		
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança	Largura	de Vazão	Intervalo de confiança	Largura
(anos)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)
2	73,14	[63,65; 82,63]	18,98	74,74	[63,62; 85,86]	22,24
10	120,95	[103,26; 138,64]	35,37	118,69	[100,61; 136,77]	36,16
20	139,48	[117,95; 161,01]	43,06	134,26	[108,61; 159,90]	51,29
50	163,77	[137,19; 190,35]	53,15	153,77	[113,43; 194,11]	80,67
100	182,26	[151,88; 212,64]	60,77	168,05	[113,85; 222,25]	108,40
500	226,34	[187,10; 265,58]	78,48	200,48	[106,34; 294,62]	188,28
1000	245,98	[202,86; 289,09]	86,23	214,324	[99,94; 328,70]	228,76
10000	314,84	[254,68; 375,00]	120,32	260,484	[119,96; 401,00]	281,04

		Pearson III		Log-Pearson III		
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança	Largura	de Vazão	Intervalo de confiança	Largura
(anos)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)
2	73,72	[62,82; 84,62]	21,81	74,56	[65,61; 83,54]	17,92
10	120,10	[99,14; 141,06]	41,92	120,18	[102,87; 137,49]	34,63
20	136,60	[106,07; 167,13]	61,06	136,06	[114,06; 158,06]	44,01
50	157,40	[108,28; 206,52]	98,23	155,54	[126,67; 184,41]	57,74
100	171,79	[105,62; 237,96]	132,35	169,5	[134,94; 204,06]	69,12
500	204,48	[91,90; 317,06]	225,16	200,09	[150,65; 249,52]	98,86
1000	218,70	[83,82; 353,58]	269,77	212,67	[156,08; 269,25]	113,16
10000	261,76	[101,64; 421,88]	320,24	252,53	[177,08; 327,97]	150,89

		Gumbel		-		
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança	Largura	de Vazão	Intervalo de confiança	Largura
(anos)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)
2	73,824	[64,48; 83,15]	18,67	-	-	-
10	117,61	[96,37; 138,84]	42,47	-	-	-
20	134,34	[107,51; 161,16]	53,65	-	-	-
50	155,99	[121,73; 190,24]	68,52	-	-	-
100	172,22	[132,31; 212,12]	79,82	-	-	-
500	209,72	[156,62; 262,81]	106,19	-	-	-
1000	225,84	[167,04; 284,63]	117,59	-	-	-
10000	279,37	[201,57; 357,16]	155,60	-	-	-

de Gumbel quanto a Log Pearson III, são as que melhor representam a distribuição amostral do posto São João. Apesar da função Log Normal II apresentar uma menor variação para as estimações das vazões, este fator não compensa o fato desta estimacão estar muito diferente das demais como é mostrado na Figura 4. Além disso, conforme foi visto no gráfico da Figura 3 as distribuições de Gumbel e Log-Pearson III foram as que melhor se ajustaram à distribuição empírica para os valores extremos, sendo portanto, suas

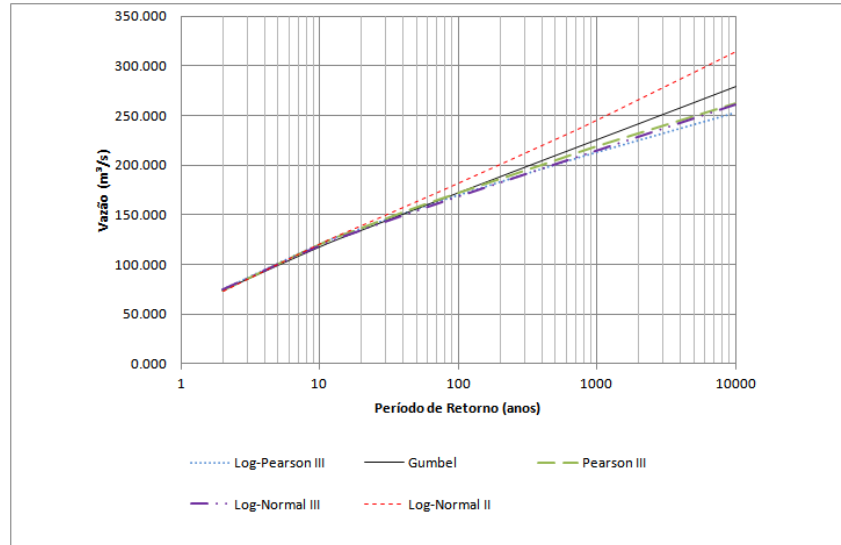


Figura 4 – Gráficos das Vazões em função do período de retorno para a amostra do posto São João.

estimativas mais confiáveis do que a distribuição Log-Normal.

Se fossem levados em consideração os intervalos de confiança, as estimativas pelo método Log Pearson III se mostra um pouco melhor do que o Método de Gumbel. Em relação aos ajustes dos extremos, conforme já discutido, o método de Gumbel se mostra um pouco superior. Porém, a análise gráfica se refere mais ao ajuste da distribuição em si do que as estimativas. Além disso, o ajuste da distribuição Log Pearson III também se mostrou, assim como Gumbel, bem próximo da distribuição empírica, não havendo uma grande diferença quanto a este fator. Leva-se em conta também, o fato de que a análise gráfica é qualitativa, enquanto que os intervalos de confiança nos fornecem uma análise quantitativa. Utilizando este critério, pode-se dizer que o método Log Pearson III nos fornece uma maior segurança quanto a estimação destas vazões em relação aos outros.

Já os métodos Log-Normal III e Pearson III apresentaram um intervalo de confiança muito largo, o qual não nos garante segurança quanto as suas estimativas.

4.4 Resultados para as amostras restantes

Nesta seção serão apresentados e discutidos os resultados para as amostras dos postos Ferreira das Almas, Usina Ester, Turvo e Americana Velha.

Tabela 10 – Resultados dos testes de aderência para as distribuições de probabilidades em relação a amostra do posto 5E-003 (Ferreira das Almas), com $N=29$ e $\alpha = 5\%$

Distribuição	Kolmogorov-Smirnov			Qui-quadrado		
	D_{Teste}	$D_{Crit.}$	Rejeita?	χ^2_{Teste}	$\chi^2_{Crit.}$	Rejeita?
Log-Normal II	0,13686	0,23076	Não	0,81688	9,4877	Não
Log-Normal III	0,13898	0,24571	Não	1,3993	7,8147	Não
Pearson III	0,14436	0,24571	Não	0,63297	7,8147	Não
Log-Pearson III	0,13428	0,24571	Não	1,373	7,8147	Não
Gumbel	0,15985	0,24571	Não	2,05	7,8147	Não

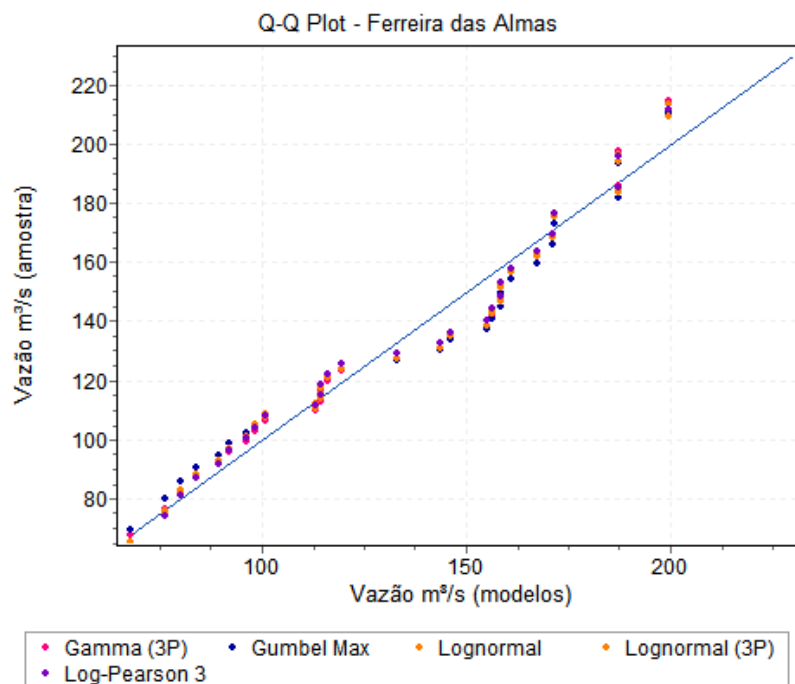


Figura 5 – Gráfico Quantil-Quantil das distribuições ajustadas x distribuição empírica

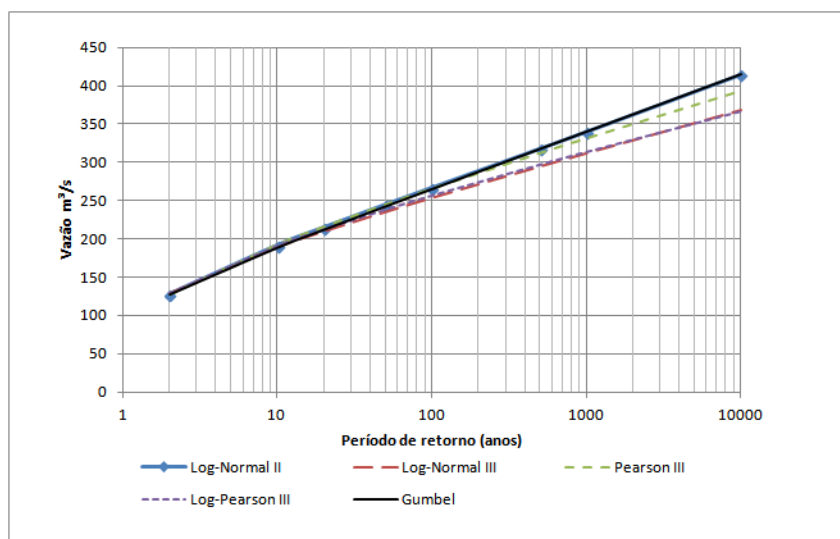


Figura 6 – Gráficos das Vazões em função do período de retorno para a amostra Ferreira das Almas.

Tabela 11 – Vazões para 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos de período de retorno e intervalos de confiança de 95% estimado com as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 5E-003 (Ferreira das Almas).

		Log-Normal II			Log-Normal III			
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança		Largura	de Vazão	Intervalo de confiança		Largura
(anos)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)
2	127.52	[121.18; 133.86]		12.67	129.14	[120.61; 137.67]		17.05
10	191.35	[171.94; 210.76]		38.82	189.42	[174.90; 203.94]		29.04
20	214.68	[188.15; 241.21]		53.05	210.08	[189.25; 230.91]		41.65
50	244.36	[207.65; 281.07]		73.41	235.54	[202.41; 268.67]		66.25
100	266.39	[221.36; 311.42]		90.05	253.93	[209.04; 298.82]		89.77
500	317.25	[250.66; 383.84]		133.18	294.96	[215.66; 374.26]		158.60
1000	339.28	[262.35; 416.21]		153.86	312.2	[215.17; 409.23]		194.06
10000	414.04	[327.92; 500.16]		172.24	368.66	[266.66; 470.66]		204.00
		Pearson III			Log-Pearson III			
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança		Largura	de Vazão	Intervalo de confiança		Largura
(anos)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)
2	126.74	[117.16; 136.32]		19.15	128.97	[122.65; 135.29]		12.63
10	192.37	[176.04; 208.70]		32.66	191.20	[167.77; 214.63]		46.86
20	215.77	[192.16; 239.38]		47.21	212.39	[175.44; 249.34]		73.89
50	244.79	[207.22; 282.36]		75.13	238.23	[194.66; 281.80]		87.13
100	265.75	[215.43; 316.07]		100.63	256.68	[197.36; 316.00]		118.63
500	312.21	[227.28; 397.14]		169.86	297.08	[204.15; 390.01]		185.86
1000	331.54	[237.62; 425.46]		187.84	313.72	[207.80; 419.64]		211.84
10000	393.71	[284.50; 502.92]		218.43	366.74	[243.53; 489.95]		246.43
		Gumbel			-			
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança		Largura	de Vazão	Intervalo de confiança		Largura
(anos)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)
2	127.04	[119.93; 134.15]		14.21	-	-		-
10	188.27	[172.11; 204.43]		32.32	-	-		-
20	211.66	[191.24; 232.08]		40.83	-	-		-
50	241.95	[215.87; 268.03]		52.15	-	-		-
100	264.64	[234.26; 295.02]		60.75	-	-		-
500	317.09	[276.68; 357.50]		80.82	-	-		-
1000	339.63	[294.88; 384.38]		89.50	-	-		-
10000	414.49	[355.28; 473.70]		118.43	-	-		-

Tabela 12 – Resultados dos testes de aderência para as distribuições de probabilidades em relação a amostra do posto 4D-001 (Usina Ester), com $N=60$ e $\alpha = 5\%$

Distribuição	Kolmogorov-Smirnov			Qui-quadrado		
	D_{Teste}	$D_{Crit.}$	Rejeita?	χ^2_{Teste}	$\chi^2_{Crit.}$	Rejeita?
Log-Normal II	0,07026	0,17231	Não	0,61206	11,07	Não
Log-Normal III	0,0826	0,17231	Não	0,08057	11,07	Não
Pearson III	0,06934	0,17231	Não	2,3717	11,07	Não
Log-Pearson III	0,08007	0,17231	Não	0,28682	11,07	Não
Gumbel	0,08312	0,17231	Não	4,9662	11,07	Não

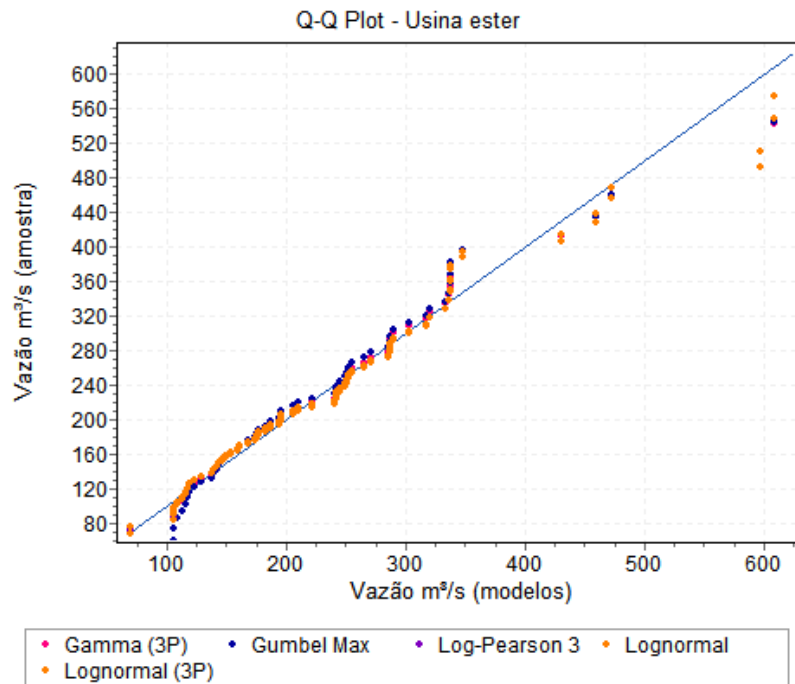


Figura 7 – Gráfico Quantil-Quantil das distribuições ajustadas x distribuição empírica

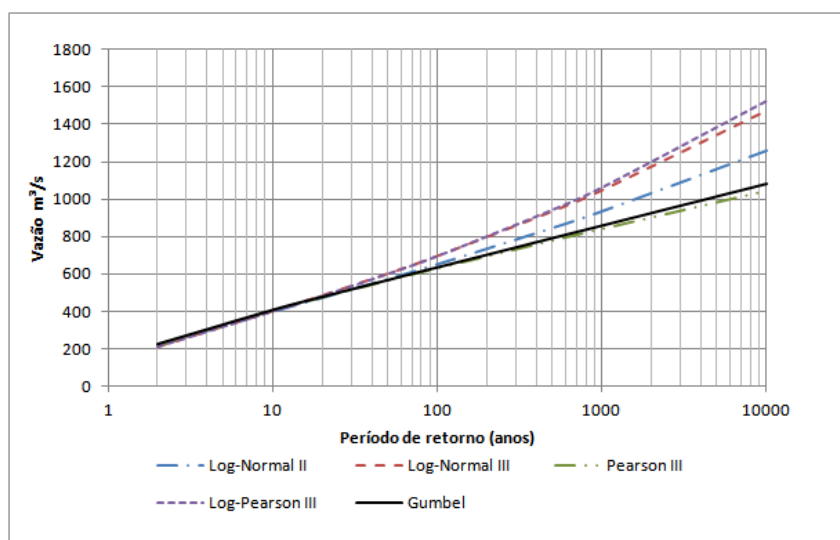


Figura 8 – Gráficos das Vazões em função do período de retorno para a amostra Usina Ester.

Tabela 13 – Vazões para 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos de período de retorno e intervalos de confiança de 95% estimado com as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 4D-001 (Usina Ester).

		Log-Normal II			Log-Normal III		
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança		Largura	de Vazão	Intervalo de confiança	
(anos)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s	
2	216.67	[202.16; 231.18]		29.02	212.86	[197.97; 227.75]	
10	397.63	[369.52; 425.74]		56.22	403.33	[375.40; 431.26]	
20	472.31	[438.92; 505.70]		66.78	486.76	[452.99; 520.53]	
50	573.26	[533.01; 613.51]		80.50	603.03	[560.63; 645.43]	
100	652.29	[606.86; 697.72]		90.86	696.47	[646.93; 746.01]	
500	847.18	[789.73; 904.63]		114.90	934.68	[866.76; 1002.60]	
1000	936.72	[874.05; 999.39]		125.33	1047.04	[970.42; 1123.66]	
10000	1261.80	[1181.79; 1341.81]		160.02	1470.60	[1380.28; 1560.92]	
		Pearson III			Log-Pearson III		
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança		Largura	de Vazão	Intervalo de confiança	
(anos)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s	
2	217.34	[202.28; 232.40]		30.12	213.74	[199.27; 228.21]	
10	403.64	[375.43; 431.85]		56.42	402.91	[375.10; 430.72]	
20	474.54	[440.39; 508.69]		68.30	486.25	[453.14; 519.36]	
50	564.18	[521.47; 606.89]		85.42	603.51	[563.37; 643.65]	
100	630.02	[580.44; 679.60]		99.16	698.85	[653.33; 744.37]	
500	778.56	[712.13; 844.99]		132.86	946.54	[888.22; 1004.86]	
1000	841.17	[767.16; 915.18]		148.01	1066.1	[1002.11; 1130.09]	
10000	1045.2	[956.96; 1133.44]		176.48	1528.4	[1447.28; 1609.52]	
		Gumbel			-		
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança		Largura	de Vazão	Intervalo de confiança	
(anos)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s	
2	222.51	[207.97; 237.05]		29.08	-	-	
10	404.92	[376.77; 433.07]		56.30	-	-	
20	474.63	[441.21; 508.05]		66.84	-	-	
50	564.85	[524.59; 605.11]		80.52	-	-	
100	632.45	[587.05; 677.85]		90.80	-	-	
500	788.69	[731.40; 845.98]		114.58	-	-	
1000	855.85	[793.44; 918.26]		124.81	-	-	
10000	1078.9	[999.49; 1158.31]		158.81	-	-	

Tabela 14 – Resultados dos testes de aderência para as distribuições de probabilidades em relação a amostra do posto 5E-009 (Turvo), com $N=32$ e $\alpha = 0,05$

Distribuição	Kolmogorov-Smirnov			Qui-quadrado		
	D_{Teste}	$D_{Crit.}$	Rejeita?	χ^2_{Teste}	$\chi^2_{Crit.}$	Rejeita?
Log-Normal II	0,12178	0,23424	Não	2,753	7,8147	Não
Log-Normal III	0,10385	0,234244	Não	1,0982	7,8147	Não
Pearson III	0,13611	0,23424	Não	0,70275	7,8147	Não
Log-Pearson III	0,10433	0,23424	Não	1,316	7,8147	Não
Gumbel	0,10209	0,23424	Não	0,70939	7,8147	Não

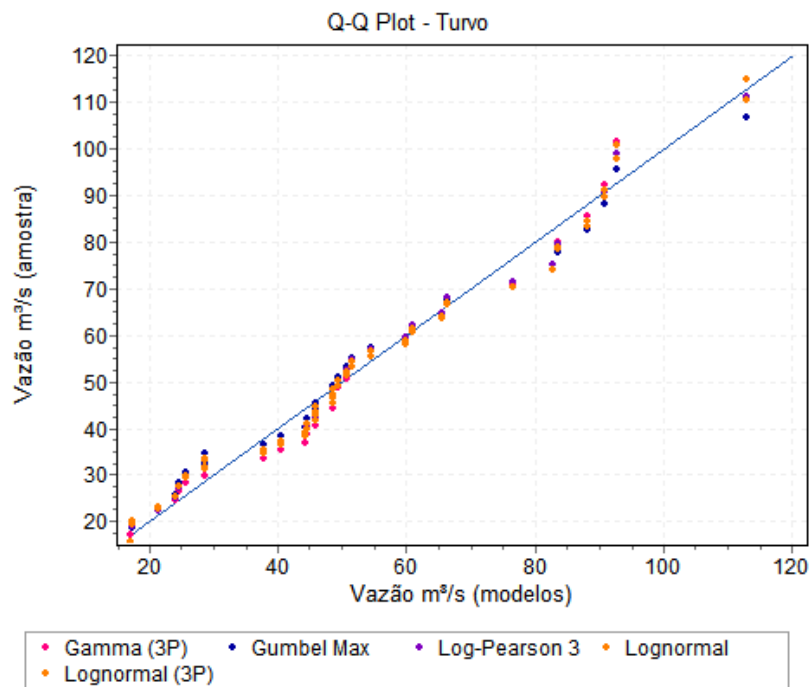


Figura 9 – Grafico Quantil-Quantil das distribuições ajustadas x distribuição empírica

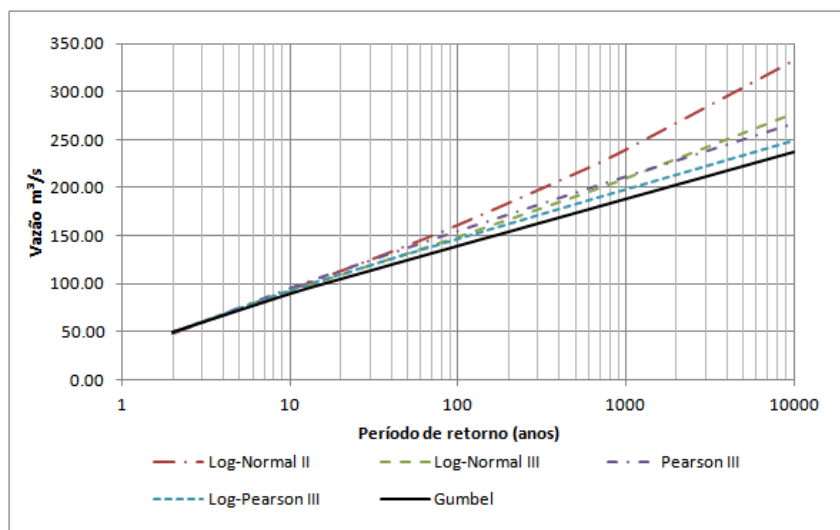


Figura 10 – Gráficos das Vazões em função do período de retorno para a amostra Turvo.

Tabela 15 – Vazões para 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos de período de retorno e intervalos de confiança de 95% estimado com as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 5E-009 (Turvo).

		Log-Normal II			Log-Normal III			
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança		Largura	de Vazão	Intervalo de confiança		Largura
(anos)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)
2	48.14	[43.88; 52.40]		8.52	49.21	[44.55; 53.87]		9.32
10	93.72	[85.56; 101.88]		16.32	91.84	[84.54; 99.14]		14.60
20	113.20	[103.73; 122.67]		18.94	108.84	[100.11; 117.57]		17.46
50	140.01	[128.89; 151.13]		22.24	131.43	[120.37; 142.49]		22.12
100	161.33	[148.98; 173.68]		24.69	148.85	[135.76; 161.94]		26.17
500	214.93	[199.80; 230.06]		30.27	191.01	[172.62; 209.40]		36.79
1000	239.98	[223.62; 256.34]		32.72	210.06	[198,14; 230,98]		41,84
10000	332.77	[311.26; 354.28]		43.02	277.89	[251.82; 303.96]		52.14
		Pearson III			Log-Pearson III			
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança		Largura	de Vazão	Intervalo de confiança		Largura
(anos)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)
2	47.51	[42.76; 52.26]		9.50	49.39	[45.11; 53.66]		8.54
10	94.81	[87.18; 102.44]		15.26	92.98	[83.74; 102.22]		18.48
20	113.31	[104.05; 122.57]		18.52	109.62	[98.08; 121.16]		23.08
50	137.03	[125.18; 148.88]		23.70	130.95	[115.89; 146.01]		30.12
100	154.59	[140.57; 168.61]		28.035	146.78	[128.63; 164.93]		36.29
500	194.51	[175.03; 213.99]		38.97	182.99	[156.07; 209.91]		53.85
1000	211.44	[189.45; 233.43]		43.98	198.45	[166.91; 229.99]		63.08
10000	266.93	[239.79; 294.07]		54.28	249.43	[213.27; 285.59]		72.31
		Gumbel			-			
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança		Largura	de Vazão	Intervalo de confiança		Largura
(anos)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s		(m^3/s)
2	50.19	[45.95; 54.43]		8.48	-	-		-
10	90.12	[81.24; 99.00]		17.76	-	-		-
20	105.38	[94.83; 115.93]		21.10	-	-		-
50	125.13	[112.45; 137.81]		25.36	-	-		-
100	139.93	[125.66; 154.20]		28.53	-	-		-
500	174.14	[156.24; 192.04]		35.81	-	-		-
1000	188.84	[169.38; 208.30]		38.92	-	-		-
10000	237.66	[213.05; 262.27]		49.22	-	-		-

Tabela 16 – Resultados dos testes de aderência para as distribuições de probabilidades em relação a amostra do posto 4E-004 (Americana Velha), com $N=44$ e $\alpha = 0,05$

Distribuição	Kolmogorov-Smirnov			Qui-quadrado		
	D_{Teste}	$D_{Crit.}$	Rejeita?	χ^2_{Teste}	$\chi^2_{Crit.}$	Rejeita?
Log-Normal II	0,08021	0,220056	Não	1,76	11,07	Não
Log-Normal III	0,0786	0,20056	Não	1,774	11,07	Não
Pearson III	0,07616	0,20056	Não	0,76208	9,4877	Não
Log-Pearson III	0,07902	0,20056	Não	1,7248	1,07	Não
Gumbel	0,09012	0,20056	Não	1,67759	11,07	Não

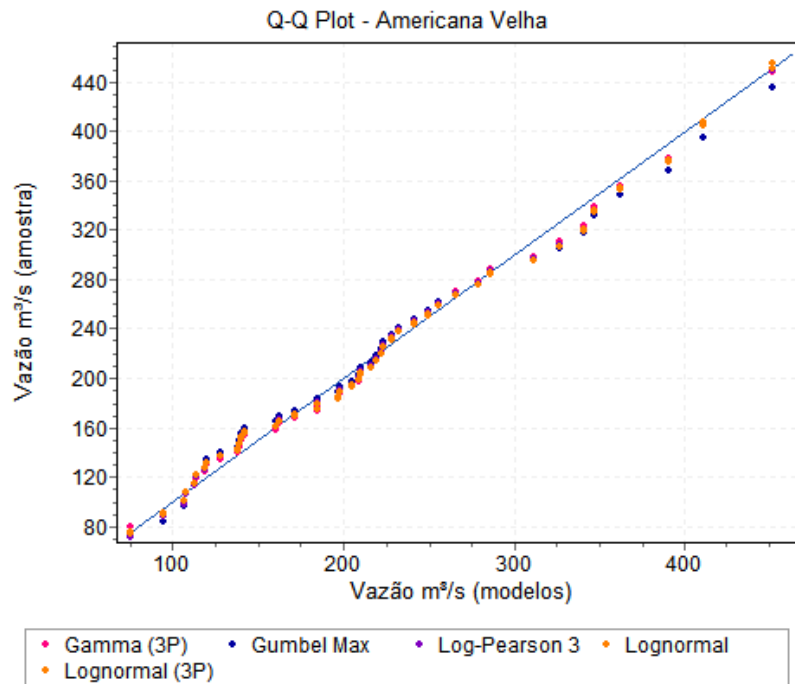


Figura 11 – Gráfico Quantil-Quantil das distribuições ajustadas x distribuição empírica

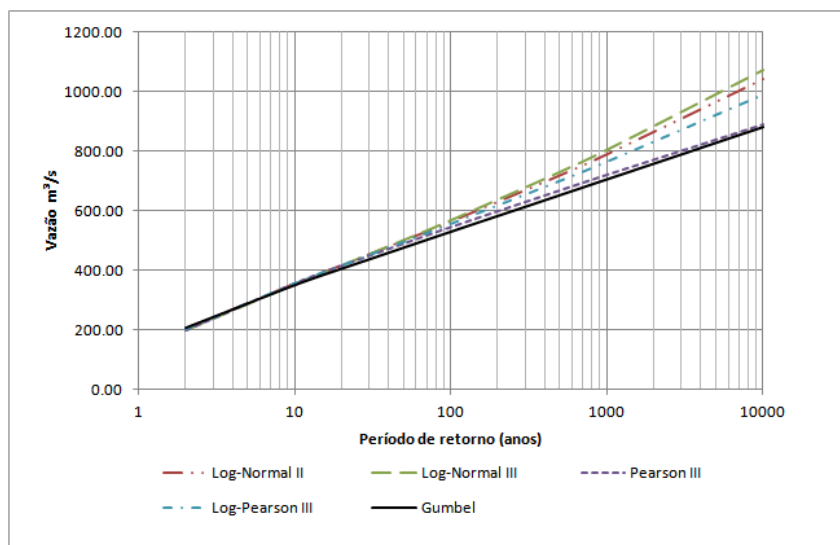


Figura 12 – Gráficos das Vazões em função do período de retorno para a amostra Americana Velha.

Tabela 17 – Vazões para 2, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 e 10000 anos de período de retorno e intervalos de confiança de 95% estimado com as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto 4E-004 (Americana Velha).

		Log-Normal II			Log-Normal III		
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança	Largura	de Vazão	Intervalo de confiança	Largura	
(anos)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)	
2	201.31	[188.41; 214.21]	25.80	200.59	[185.93; 215.25]	29.32	
10	354.53	[326.93; 382.13]	55.21	355.62	[331.76; 379.48]	47.73	
20	416.22	[382.29; 450.15]	67.86	418.85	[388.80; 448.90]	60.10	
50	498.60	[456.04; 541.16]	85.11	503.94	[462,91; 544,77]	81.85	
100	562.38	[513.03; 611.73]	98.69	570.02	[519.20; 620.84]	101.63	
500	717.57	[651.37; 783.77]	132.40	732.20	[653.73; 810.67]	156.94	
1000	788.02	[714.02; 862.02]	147.99	806.28	[714.01; 898.55]	184.53	
10000	1040.02	[950.33; 1129.71]	179.38	1073.50	[965.54; 1181.46]	215.92	

		Pearson III			Log-Pearson III		
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança	Largura	de Vazão	Intervalo de confiança	Largura	
(anos)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)	
2	200.62	[185.23; 216.01]	30.781	202.42	[189.46; 215.38]	25.92	
10	357.66	[332.42; 382.90]	50.49	355.55	[331.92; 379.18]	47.27	
20	416.62	[384.33; 448.91]	64.58	415.74	[373.68; 457.80]	84.12	
50	491.12	[446.82; 535.42]	88.59	494.92	[433.75; 556.09]	122.33	
100	545.70	[490.96; 600.44]	109.47	555.36	[475.41; 635.31]	159.89	
500	668.51	[586.38; 750.64]	164.26	699.50	[556.50; 842.50]	286.00	
1000	720.19	[625.19; 815.19]	189.99	763.70	[582.61; 944.79]	362.17	
10000	888.28	[777.59; 998.97]	221.38	988.03	[768.86; 1207.20]	438.34	

		Gumbel			-		
Período de retorno	Vazão	Intervalo de confiança	Largura	de Vazão	Intervalo de confiança	Largura	
(anos)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)	(m^3/s)	m^3/s	(m^3/s)	
2	205.34	[191.92; 218.76]	26.84	-	-	-	
10	349.35	[323.37; 375.33]	51.97	-	-	-	
20	404.93	[374.08; 435.78]	61.70	-	-	-	
50	475.95	[438.78; 513.12]	74.33	-	-	-	
100	529.39	[487.48; 571.30]	83.81	-	-	-	
500	652.89	[600.01; 705.77]	105.76	-	-	-	
1000	705.98	[648.37; 763.59]	115.21	-	-	-	
10000	882.26	[808.96; 955.56]	146.60	-	-	-	

Em virtude destes resultados, pode-se observar que:

De acordo com os testes de aderência (Tabelas 10, 12, 14 e 16), para todas as amostras, nenhuma das distribuições candidatas foram rejeitadas. Isto significa que, nes-

tes exemplos, todas as funções de distribuição que foram propostas aqui servem para representar qualquer uma das distribuições de frequência aqui amostradas segundo os testes KS e χ^2 .

Nas Figuras 3, 5, 7, 9 e 11, estão representados os gráficos Q-Q das distribuições em relação às amostras. Com base nestes gráficos, observa-se que as distribuições estão bem ajustadas às amostras dos pontos de Americana Velha e de São João, enquanto que para as demais amostras há uma distância um pouco grande entre os pontos das distribuições em relação a reta $x=y$ dos gráficos. Embora, todas as distribuições tenham passado nos testes de aderência para todas as amostras, através do gráfico da Figura 7 é notável a diferença entre as vazões extrapoladas e as vazões empíricas na cauda superior para a amostra do posto Usina Ester. Com uma análise mais minuciosa, é possível notar que:

- Para a série de vazões máximas anuais do Posto São João, as distribuições que mais se aproximam dos valores empíricos extremos são Gumbel e Log Pearson III;
- Para a série de vazões máximas anuais do Ferreira das Almas, as distribuições que mais se aproximam dos valores empíricos extremos são Log Normal II e Gumbel;
- Para a série de vazões máximas anuais do Posto Usina Ester, as distribuições que mais se aproximam dos valores empíricos extremos são Log Pearson III e Log Normal III;
- Para a série de vazões máximas anuais do Posto Turvo, as distribuições que mais se aproximam dos valores empíricos extremos são Gumbel e Log Pearson III;
- Para a série de vazões máximas anuais do Posto Americana Velha, as distribuições que mais se aproximam dos valores empíricos extremos são Gumbel e Pearson III;

Em suma, pelo teste visual, é visto que entre as distribuições candidatas, Gumbel é a distribuição que, de modo geral, melhor se ajustou, ficando em segundo lugar as distribuições Log Normal II e Log Pearson III.

Das Tabelas 11, 13, 15 e 17 é possível analisar as estimativas das vazões $Tr=500$ e $Tr=1000$. Para todas as amostras, os ajustes que apresentaram menor amplitude do intervalo de confiança, e conseqüentemente um menor erro padrão, foram as distribuições de Gumbel e Log-Normal II. No caso da distribuição de Log Pearson III, para as séries de vazões do posto São João e do posto Usina Ester, esta apresentou intervalos de confiança similares aos das distribuições de Gumbel e Log Normal II. Porém, esta mesma distribuição se mostrou ser muito imprecisa quanto as estimativas para as amostras dos postos Americana Velha, Turvo e Ferreira das Almas. As distribuições Log Normal III e Pearson III apresentaram um intervalo de confiança relativamente alto para todas as amostras, quando comparado com as demais distribuições.

Finalmente, as estimativas das vazões, em relação ao seus respectivos períodos de retorno, de cada distribuição para cada uma das amostras, podem ser visualizadas nas Figuras 4, 6, 8, 10 e 12.

5 Conclusões e Recomendações

5.1 Conclusões

Dos dados coletados para este trabalho, todas as séries de vazões máximas anuais puderam ser estimadas pelos 5 modelos candidatos proposto. Isto foi confirmado diante do fato de que, para todas as amostras, os testes de aderência, tanto o Kolmogorov-Smirnov quanto o Qui-Quadrado, não rejeitaram nenhuma das distribuições modelos a nível de significância de 5%. Todavia, os testes apenas nos fornecem o fato de que não houve diferença estatística significativa entre as amostras e os modelos pois, em geral, os testes de aderência são deficientes em discernir as diferenças entre as frequências teóricas e empíricas nas caudas inferior e superior das distribuições em análise.

Das análises teóricas foi visto que, a princípio, não existe uma distribuição ideal representativa da amostra para executar uma análise de frequências, e nem mesmo existe uma metodologia definida para selecionar qual distribuição é melhor para se representar uma certa amostra. O teste comparativo de modelos para estimar as vazões máximas de projetos nos mostra que de fato, não existe um padrão para definir qual modelo será melhor. Esta ideia se confirma no fato de que para cada amostra, houveram resultados diferentes de escolha do melhor modelo, usando os mesmos critérios de seleção. Este resultado é importante pois ele nos revela que o modelo ideal para se representar uma série de vazões máximas anuais depende das características da amostra. Este resultado nos mostra também que a variável hidrológica das vazões apresentam tendências de comportamento, uma vez que apesar de um mesmo modelo não ser o melhor para representar a devida amostra, o mesmo ainda assim foi capaz de se ajustar à distribuição amostral a nível de significância específico.

Quanto ao fato da eficiência dos modelos para estimar vazões relativas a altos períodos de retorno, no caso aqui, $T_r = 500$ e $T_r = 1000$, foi visto que, as incertezas das estimativas dos métodos aumentam conforme aumenta o período de retorno. Em outras palavras, os intervalos de confiança relativos a estimativas de vazões para pequenos períodos de retorno, é extremamente pequeno quando comparado com 500 ou 1000 anos, por exemplo. Todavia, através do teste, foi possível ver que diante da variedade de modelos de distribuição, uns se apresentam melhores que os outros quanto a extrapolação destas vazões. Entre os cinco modelos pré-selecionados para este trabalho e, de acordo com o teste comparativo, foi visto que o Método de Gumbel teve em geral um melhor desempenho que os demais, porém, nem sempre sendo o melhor método especificamente. Na série de vazões referentes aos dados do posto São João por exemplo, o Método de Gumbel se mostrou superior aos outros pelo teste da comparação visual gráfica. Visualmente, é visto que ele

é o que se encontra mais próximo dos valores empíricos, além de apresentar uma melhor tendência linear, seguindo portando a reta $x=y$ do gráfico Q-Q. Porém, para a mesma amostra, o método de Log Pearson III apresentou um intervalo de confiança um pouco mais preciso em comparação ao Método de Gumbel. Já nas séries de vazões máximas das amostras do posto Americana Velha, em relação a tendência amostral, o Modelo de Gumbel foi o que forneceu a pior estimativa das vazões extremas de projeto.

A partir do teste, foi possível concluir que o método de Gumbel, quanto a aderência amostral, por maioria, foi o que melhor se ajustou para os períodos de retorno 500 e 1000 anos. É visto também, que para todas as amostras, em relação aos outros modelos, o Modelo de Gumbel apresentou um dos menores valores de intervalo de confiança a nível de 95%. O modelo Log Normal Tipo II, foi o que apresentou em geral, os menores intervalos de confiança porém, nem sempre sendo o melhor quanto o ajuste à amostra, fornecendo, muitas vezes, extrapolações diferentes do esperado.

Além destes pontos, o teste também nos mostra que as distribuições de três parâmetros, Log Pearson III, Pearson III e Log Normal III, foram as que apresentaram maiores valores de intervalos de confiança. Estas incertezas provavelmente devem ser da inclusão de um terceiro parâmetro ao modelo, tornando-o mais flexível porém, menos robusto.

Em virtude destes resultados pode-se dizer que não somente o modelo de Gumbel, mas também todos outros aqui utilizados, foram válidos para análise destas frequências locais e portanto cálculo de vazões relativas a períodos de retorno 500 e 1000 anos pois, todos eles se adequaram aos modelos das amostras. Portanto, é de se esperar, mesmo que nem sempre, que algum deles seja válido para análises de uma amostra qualquer. Pode se dizer então, conforme era o objetivo deste trabalho, que o modelo de Gumbel é válido para cálculo o de vazões de dimensionamento de vertedouros de PCH's, porém, nem sempre o melhor. O fato de ser uma distribuição de dois parâmetros o torna mais robusto, o que faz com que o mesmo perca um pouco na precisão mas, ao mesmo tempo, o torna menos susceptivo à incertezas. O seu uso depende da distribuição da amostra bem como de sua qualidade, sendo necessário, portando, fazer uma análise prévia das características das mesmas e testes de aderência do modelo antes de usá-lo.

Ao longo deste trabalho, foi possível observar que o modelo de Gumbel apresenta uma grande vantagem em relação aos outros 4 modelos utilizados no teste, no que diz respeito a sua implementação. Quando comparado aos outros modelos, o método de Gumbel se mostrou ser extremamente mais simples e prático de se utilizar, tanto nos cálculos de estimação dos parâmetros quanto nas extrapolações das grandezas de interesse e de seus respectivos intervalos de confiança.

5.2 Recomendações

Embora o Método de Gumbel possa ser utilizado, sob certas condições, para estimar vazões máximas de projetos de vertedouros de PCH's, seria necessário complementar este estudo analisando, por exemplo, a sua eficiência em relação à outros métodos, quanto a sua precisão para estimativas.

Além disso, levando-se em conta a precisão deste métodos, e em virtude do setor elétrico brasileiro estar em constante desenvolvimento devido ao seu potencial hidrelétrico, poderia-se levantar curvas de risco em função do custo para cada método utilizado.

Referências

- AKSOY, H. Use of gamma distribution in hydrological analysis. *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences*, v. 24, n. 6, p. 419–428, 2000. Citado na página 36.
- BEARD, L. R. et al. Flood flow frequency techniques. *Technical Report*, CRWR, 1974. Citado na página 36.
- BOBEE, B. The log pearson type 3 distribution and its application in hydrology. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 11, n. 5, p. 681–689, 1975. Citado na página 36.
- BOBEE, B. B.; ROBITAILLE, R. The use of the pearson type 3 and log pearson type 3 distributions revisited. *Water Resources Research*, American Geophysical Union, v. 13, n. 2, p. 427–443, 1977. Citado na página 36.
- CHOW, V. T.; MAIDMENT, D. R.; LARRY, W. Mays. 1988. applied hydrology. *McGrawHill International editions*, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 52.
- DAEE: Site. 2013. Disponível em: <<http://www.daee.sp.gov.br>>. Acesso em: 01 nov. 2013. Citado na página 46.
- GALLO, N. F. Análise comparativa de incertezas em métodos para estimação de freqüências de vazões máximas diárias com incorporação de variação climática em bacias do medio rio uruguai. UFRGS, 2007. Citado na página 34.
- GRUBBS, F. E.; BECK, G. Extension of sample sizes and percentage points for significance tests of outlying observations. *Technometrics*, Taylor & Francis Group, v. 14, n. 4, p. 847–854, 1972. Citado 4 vezes nas páginas 47, 53, 83 e 84.
- GUIMARÃES, R. C. Probabilidade e estatística aplicada à hidrologia. Departamento de Engenharia Rural, 2011. Citado na página 47.
- GUMBEL, E. J. *Statistics of extremes*. [S.l.]: DoverPublications. com, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 40.
- HAAN, C. T. Statistical methods in hydrology. The Iowa State University Press, 1977. Citado na página 36.
- JENKINSON, A. Statistics of extremes. *Estimation of Maximum Floods*, WMO, v. 233, p. 183–228, 1969. Citado na página 36.
- LANGBEIN, W. B. *Annual floods and the partial-duration flood series*. [S.l.]: American Geophysical Union, 1949. Citado na página 36.
- MARTINS, E. S.; STEDINGER, J. R. Generalized maximum-likelihood generalized extreme-value quantile estimators for hydrologic data. *Water Resources Research*, American Geophysical Union, v. 36, n. 3, p. 737–744, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 51.

- MEYER, P. L. Probabilidade: aplicações à estatística. Livro Técnico, 1970. Citado 6 vezes nas páginas 29, 31, 32, 42, 43 e 87.
- MOTA, S. *Urbanização e Meio Ambiente*. 3rd. ed. Rio de Janeiro-RJ: ABES, 2003. Citado na página 29.
- PINTO, E. de; NAGHETTHINI, M. *Hidrologia estatística*. [S.l.]: CPRM, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 15, 33, 35, 42, 51 e 85.
- PORTER, T. M. *Karl Pearson: The scientific life in a statistical age*. [S.l.]: Princeton University Press, 2010. Citado na página 38.
- SANTOS, L. C. C. Estimativa de vazões máximas de projeto por métodos determinísticos e probabilísticos. UFES, 2010. Citado na página 29.
- SILVINO, A. N. de O. et al. Determinação de vazões extremas para diversos períodos de retorno para o rio paraguai utilizando métodos estatísticos. *Geosciences= Geociências*, v. 26, n. 4, p. 369–378, 2008. Citado na página 48.
- TUCCI, C. E. et al. *Modelos hidrológicos*. [S.l.]: UFRGS, 1998. Citado na página 51.
- VILLELA, S. M.; MATTOS, A. Hidrologia aplicada. McGraw-Hill, 1975. Citado na página 30.

Apêndices

APÊNDICE A – Valores dos parâmetros ajustados às amostras

Tabela 18 – Parâmetros estimados para as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto Ferreira das Almas

Log-Normal II		Log-Normal III			Pearson III		
σ	μ	σ	μ	γ	α	β	γ
0,3166	4,8483	0,2350	5,1446	-42,37	4,0081	21,7995	46,528
Gumbel		Log-Pearson III			-	-	-
σ	μ	α	β	γ	-	-	-
32,503	115,12	90,392	-0,0339	7,9122	-	-	-

Tabela 19 – Parâmetros estimados para as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto Usina Ester

Log-Normal II		Log-Normal III			Pearson III		
σ	μ	σ	μ	γ	α	β	γ
0,4737	5,3784	0,5522	5,2206	27,815	2,3122	79,053	60,123
Gumbel		Log-Pearson III			-	-	-
σ	μ	α	β	γ	-	-	-
96,831	187,02	136,96	0,0408	-0,2127	-	-	-

Tabela 20 – Parâmetros estimados para as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto Turvo

Log-Normal II		Log-Normal III			Pearson III		
σ	μ	σ	μ	γ	α	β	γ
0,5197	3,8741	0,4291	4,0631	-8,9442	1,8212	22,305	14,034
Gumbel		Log-Pearson III			-	-	-
σ	μ	α	β	γ	-	-	-
21,198	42,42	47,284	-0,0768	7,506	-	-	-

Tabela 21 – Parâmetros estimados para as distribuições Log-Normal II, Log-Normal III, Pearson III, Log-Pearson III e Gumbel no posto Americana Velha

Log-Normal II		Log-Normal III			Pearson III		
σ	μ	σ	μ	γ	α	β	γ
0,4416	5,3048	0,4585	5,2672	6,7233	2,5018	64,274	60,665
Gumbel		Log-Pearson III			-	-	-
σ	μ	α	β	γ	-	-	-
76,542	177,28	725,43	-0,0166	17,337	-	-	-

APÊNDICE B – Diagrama de frequência das amostras estudadas junto à suas respectivas Funções Densidade de Probabilidades candidatas ajustadas

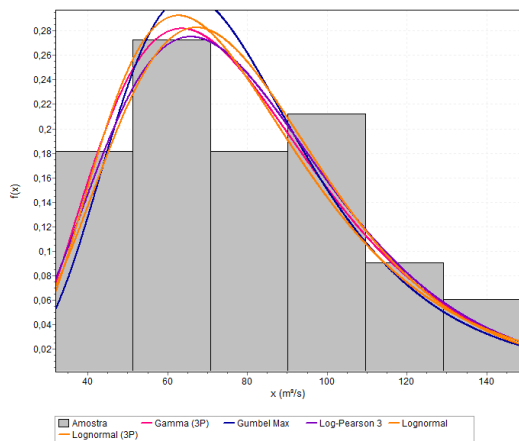


Figura 13 – 5E-012: São João

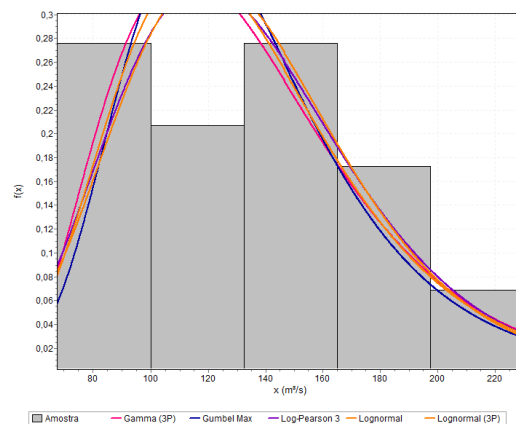


Figura 14 – 5E-003: Ferreira das Almas

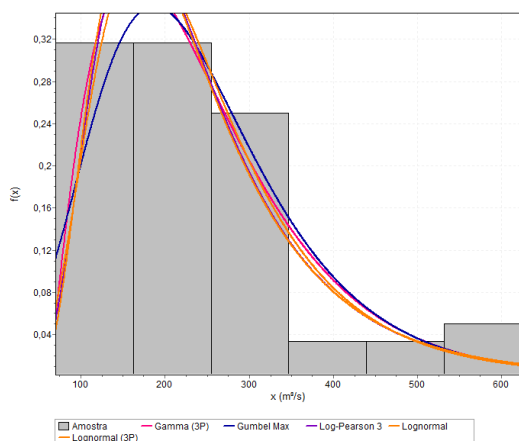


Figura 15 – 4D-001: Usina Ester

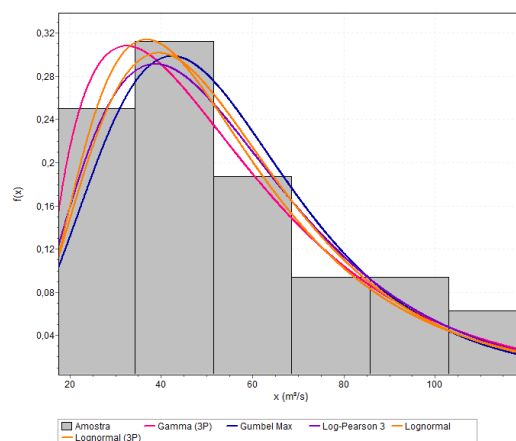


Figura 16 – 5E-009: Turvo

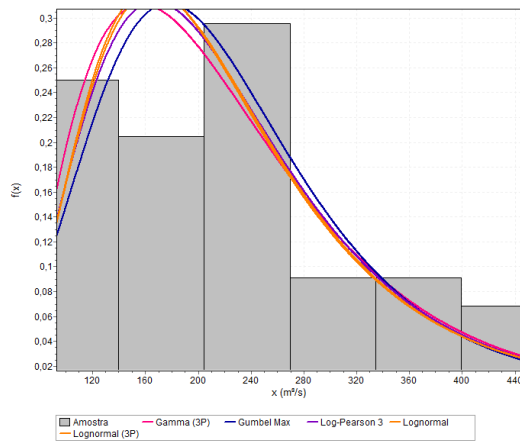


Figura 17 – 4E-004: Americana Velha

Anexos

ANEXO A – Valores críticos de T do Teste de Grubbs & Beck (1972), para valores extremos inferiores e superiores

Tabela 22 – Valores críticos de $T_{N,\alpha}$ do Teste de Grubbs & Beck (1972), para valores extremos inferiores, sendo N o tamanho da amostra e α , o nível de significância.

Tamanho da Amostra (N)	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 10\%$
3	1,155	1,153	1,148
5	1,749	1,672	1,602
7	2,097	1,938	1,828
10	2,410	1,938	2,036
12	2,550	2,285	2,134
15	2,705	2,409	2,247
20	2,884	2,557	2,385
22	2,939	2,603	2,429
25	3,009	2,663	2,486
30	3,103	2,745	2,563
35	3,178	2,811	2,628
40	3,240	2,866	2,682
45	3,292	2,914	2,727
50	3,336	2,956	2,768
55	3,376	2,992	2,804
60	3,411	3,025	2,837
65	3,442	3,055	2,866
68	3,460	3,071	2,883
70	3,471	3,082	2,893
75	3,496	3,107	2,917
78	3,511	3,121	2,931
80	3,521	3,130	2,940
85	3,543	3,151	2,961
90	3,563	3,171	2,981
100	3,600	3,207	3,017
110	3,632	3,239	3,049
120	3,632	3,267	3,078
130	3,688	3,294	3,104

Fonte: Adaptado de Grubbs e Beck (1972)

Tabela 23 – Valores críticos de $T_{N,\alpha}$ do Teste de Grubbs & Beck (1972), para valores extremos superiores, sendo N o tamanho da amostra e α , o nível de significância.

Tamanho da Amostra (N)	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 10\%$
3	0,000	1,153	1,148
5	0,0035	1,672	1,602
7	0,0440	1,938	1,828
10	0,1414	0,2305	0,2863
12	0,2043	0,2996	0,3552
15	0,2859	0,3818	0,4345
20	0,3909	0,4804	0,5270
22	0,4245	0,5107	0,5550
25	0,4680	0,5495	0,5906
30	0,5268	0,6008	0,6375
35	0,5730	0,6405	0,6737
40	0,6104	0,6724	0,7025
45	0,6412	0,6985	0,7261
50	0,6672	0,7203	0,7459
55	0,6894	0,7390	0,7627
60	0,7086	0,7550	0,7772
65	0,7253	0,7690	0,7898
68	0,7344	0,7766	0,7966
70	0,7401	0,7813	0,8009
78	0,7605	0,7983	0,8162
80	0,7650	0,8021	0,8197
90	0,7853	0,8190	0,8349
100	0,8020	0,8329	0,8475
110	0,8162	0,8447	0,8581
120	0,8284	0,8548	0,8672
130	0,8389	0,8636	0,8752

Fonte: Adaptado de Grubbs e Beck (1972)

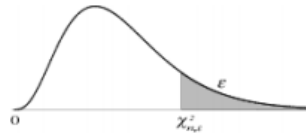
ANEXO B – Valores Críticos da estatística D do teste de aderência KS

N	$D_{N,0,10}$	$D_{N,0,05}$	$D_{N,0,02}$	$D_{N,0,01}$	N	$D_{N,0,10}$	$D_{N,0,05}$	$D_{N,0,02}$	$D_{N,0,01}$
10	0,369	0,409	0,457	0,489	26	0,233	0,259	0,290	0,311
11	0,352	0,391	0,437	0,468	27	0,229	0,254	0,284	0,305
12	0,338	0,375	0,419	0,449	28	0,225	0,250	0,279	0,300
13	0,325	0,361	0,404	0,432	29	0,221	0,246	0,275	0,295
14	0,314	0,349	0,390	0,418	30	0,218	0,242	0,270	0,290
15	0,304	0,338	0,377	0,404	31	0,214	0,238	0,266	0,285
16	0,295	0,327	0,366	0,392	32	0,211	0,234	0,262	0,281
17	0,286	0,318	0,355	0,381	33	0,208	0,231	0,258	0,277
18	0,279	0,309	0,346	0,371	34	0,205	0,227	0,254	0,273
19	0,271	0,301	0,337	0,361	35	0,202	0,224	0,251	0,269
20	0,265	0,294	0,329	0,352	36	0,199	0,221	0,247	0,265
21	0,259	0,287	0,321	0,344	37	0,196	0,218	0,244	0,262
22	0,253	0,281	0,314	0,337	38	0,194	0,215	0,241	0,258
23	0,247	0,275	0,307	0,330	39	0,191	0,213	0,238	0,255
24	0,242	0,269	0,301	0,323	40	0,189	0,210	0,235	0,252
25	0,238	0,264	0,295	0,317	>40	$1,22/\sqrt{N}$	$1,36/\sqrt{N}$	$1,52/\sqrt{N}$	$1,63/\sqrt{N}$

Fonte: Adaptado de Pinto e Naghetthini (2007)

ANEXO C – Distribuição do Qui-Quadrado

$$\chi^2_{n,\epsilon} : P(X > \chi^2_{n,\epsilon}) = \epsilon$$



ϵ n	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.341	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.340	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	9.299	12.340	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.527
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165	13.339	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.124
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037	14.339	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.698
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912	15.338	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792	16.338	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.791
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675	17.338	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562	18.338	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.819
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452	19.337	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.314
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344	20.337	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.796
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	17.240	21.337	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	18.137	22.337	27.141	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037	23.337	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558	51.179
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939	24.337	29.339	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.619
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843	25.336	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.051
27	11.808	12.878	14.573	16.151	18.114	21.749	26.336	31.528	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.475
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657	27.336	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.994	56.892
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	23.567	28.336	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.335	58.301
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	24.478	29.336	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.702
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	39.335	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.403
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	42.942	49.335	56.334	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	52.294	59.335	66.981	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	61.698	69.334	77.577	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215	112.317
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	71.145	79.334	88.130	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	80.625	89.334	98.650	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	137.208
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	90.133	99.334	109.141	118.498	124.342	129.561	135.807	140.170	149.449

Fonte: Adaptado de Meyer (1970)